Решение задачи: дискретная случайная величина

Задание. На переэкзаменовку по теории вероятностей явились 3 студента. Вероятность того, что первый сдаст экзамен, равна 0,8, второй - 0,7, третий - 0,9. Найдите ряд распределения случайной величины ξ числа студентов, сдавших экзамен, постройте график функции распределения, найдите M(ξ), D(ξ).

Решение. Пусть ξ - дискретная случайная величина, равная количеству студентов, сдавших экзамен она может принимать значения 0, 1, 2 и 3. Найдем эти вероятности.

Введем независимые события:

A_1 = (Первый студент сдал экзамен),

A_2 = (Второй студент сдал экзамен),

A_3 = (Третий студент сдал экзамен).

Вероятности известны: $P(A_1)=0,8$, $P(A_2)=0,7$, $P(A_3)=0,9$. Соответственно, вероятности того, что событие не произойдет, равны: $P(\overline{A_1})=0,2$, $P(\overline{A_2})=0,3$, $P(\overline{A_3})=0,1$.

$\xi=0$, если все три студента не сдали экзамен. Тогда

$$P(X=0)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})=0,2\cdot 0,3\cdot 0,1=0,006$$

$\xi=1$, если один студент сдал, а остальные два - не сдали экзамен, поэтому вероятность

$$P(X=1)=P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)=$$
$$=0,8\cdot 0,3\cdot 0,1+0,2\cdot 0,7\cdot 0,1+0,2\cdot 0,3\cdot 0,9=0,092.$$

$\xi=2$, если один студент не сдал, а другие два сдали экзамен, поэтому вероятность

$$P(X=2)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)+P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)=$$
$$=0,8\cdot 0,7\cdot 0,1+0,2\cdot 0,7\cdot 0,9+0,8\cdot 0,3\cdot 0,9=0,398.$$

$\xi=3$, если все три студента сдали экзамен, вероятность равна $P(X=3)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0,8\cdot 0,7\cdot 0,9=0,504$.

Получаем ряд распределения величины ξ:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

Найдем функцию распределения $F(x)=P(\xi<x)$, то есть

при x $\le$ 0, F(x) = 0,

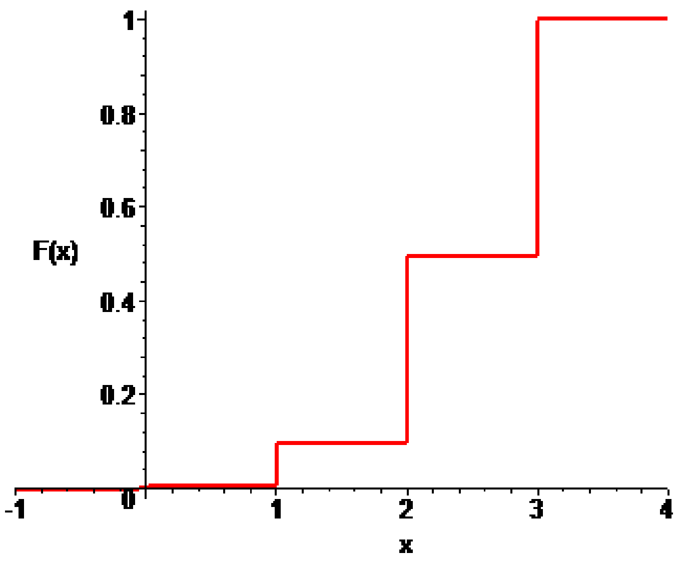
при 0< x $\le$ 1, F(x) = 0+0,006= 0,006,

при 1< x $\le$ 2, F(x) = 0,006+0,092 =0,098,

при 2< x $\le$ 3, F(x) = 0,098+0,398=0,496,

при x>3, F(x) =0,496+0,504=1.

График функции распределения:



Математическое ожидание

$$M\xi=\sum x_i p_i=0\cdot 0,006+1\cdot 0,092+2\cdot 0,398+3\cdot 0,504=2,4.$$

Дисперсия

$$D\xi=\sum x_i^2 p_i-(M\xi)^2=0\cdot 0,006+1\cdot 0,092+4\cdot 0,398+9\cdot 0,504-2,4^2=0,46.$$