Дискретная случайная величина

Математическое ожидание выигрыша

Пример решения

Задание. Двое поочередно бросают монету до первого появления герба. Игрок, у которого выпал герб, получает от другого игрока 1 рубль. Найти математическое ожидание выигрыша каждого игрока.

Решение.

Вероятность того, что игра завершается на -ом броске равна $\frac{1}{2^n}$. При нечетном n выигрывает первый игрок, при четном - второй. Тогда вероятность выигрыша первого игрока равна:

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{2k-1}} + \cdots$$

P_1 - сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $b_1 = 1/2$ и $q = 1/4$:

$$P_1 = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$

Итак, вероятность выигрыша первого игрока равна $2/3$, второго - $1/3$.

Пусть X_1 - случайная величина, равная выигрышу первого игрока.

X_1	-1	1
p	$1/3$	$2/3$

$$M(X_1) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Аналогично пусть X_2 - случайная величина, равная выигрышу второго игрока.

X_2	-1	1
p	$2/3$	$1/3$

$$M(X_2) = -1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Ответ. Математическое ожидание выигрыша для первого игрока равно $1/3$ рубля, для второго $(-1/3)$ рубля, то есть игра невыгодна для второго игрока.