

Закон распределения дискретной случайной величины

Производящая функция вероятностей

Пример решения

Задание. По цели производится 4 выстрела. Вероятность попадания при этом растёт так: 0,2, 0,4, 0,6, 0,7. Найти закон распределения случайной величины X - числа попаданий. Найти вероятность того, что $X \geq 1$.

Решение. Пусть X - число попаданий при четырех выстрелах. Она принимает значения 0, 1, 2, 3 и 4. Найдем соответствующие вероятности.

По условию известны вероятности попаданий: $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,6$, $p_4 = 0,7$. Тогда вероятности промахов: $q_1 = 0,8$, $q_2 = 0,6$, $q_3 = 0,4$, $q_4 = 0,3$.

Составим производящую функцию вероятности:

$$\begin{aligned}\varphi_4(z) &= (p_1z + q_1)(p_2z + q_2)(p_3z + q_3)(p_4z + q_4) = \\ &= (0,2z + 0,8)(0,4z + 0,6)(0,6z + 0,4)(0,7z + 0,3) = \\ &= 0,0336z^4 + 0,2216z^3 + 0,4136z^2 + 0,2736z + 0,0576.\end{aligned}$$

Вероятность того, что 4 выстрела попадут в цель, равна коэффициенту при z^4 :
 $P(X = 4) = 0,0336$.

Вероятность того, что 3 выстрела попадут в цель, равна коэффициенту при z^3 :
 $P(X = 3) = 0,2216$.

Вероятность того, что 2 выстрела попадут в цель, равна коэффициенту при z^2 :
 $P(X = 2) = 0,4136$.

Вероятность того, что 1 выстрел попадет в цель, равна коэффициенту при z :
 $P(X = 1) = 0,2736$.

Вероятность того, что 0 выстрелов попадут в цель, равна коэффициенту при $z^0 = 1$:
 $P(X = 0) = 0,0576$.

Получаем закон распределения:

| | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| p_i | 0,0576 | 0,2736 | 0,4136 | 0,2216 | 0,0336 |

Найдем вероятность того, что $X \geq 1$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,0576 = 0,9424.$$