

Закон распределения дискретной случайной величины

Пример решения

Задание. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано три выстрела. Найти математическое ожидание, дисперсию и С.К.О. этой случайной величины. Построить график функции распределения.

Решение. Введем дискретную случайную величину X = (Число попаданий в цель). X может принимать значения 0, 1, 2 и 3. Найдем соответствующие вероятности.

Введем дополнительно независимые события

$A_i = \{i\text{-ый выстрел попал в цель}\}$, $i=1,2,3$.

По условию известны вероятности:

$$P(A_1) = 0,8, \quad P(A_2) = 0,8 - 0,1 = 0,7, \quad P(A_3) = 0,7 - 0,1 = 0,6,$$

соответственно вероятности промахов:

$$P(\overline{A_1}) = 0,2, \quad P(\overline{A_2}) = 0,3, \quad P(\overline{A_3}) = 0,4.$$

$X = 0$, если при трех выстрелах стрелок промахнется все три раза, то есть одновременно произойдут события $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ и $\overline{A_3}$. Вероятность этого:

$$P(X = 0) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,024.$$

$X = 1$, если при трех выстрелах будет одно попадание и два промаха,

$$P(X = 1) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = \\ = 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,188.$$

$X = 2$, если при трех выстрелах будет два попадания и один промах:

$$P(X = 2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = \\ = 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,452.$$

$X = 3$, если при трех выстрелах будет все три попадания:

$$P(X = 3) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,336.$$

Получаем закон распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,024	0,188	0,452	0,336

Математическое ожидание

$$M(X) = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0,024 + 1 \cdot 0,188 + 2 \cdot 0,452 + 3 \cdot 0,336 = 2,1.$$

Дисперсия

$$D(X) = \sum x_i^2 p_i - (M(X))^2 = 0 \cdot 0,024 + 1 \cdot 0,188 + 4 \cdot 0,452 + 9 \cdot 0,336 - 2,1^2 = 0,61.$$

$$\text{С.К.О. случайной величины } \sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,61} \approx 0,781.$$

Найдем функцию распределения $F(x) = P(X < x)$, то есть

при $x \leq 0$, $F(x) = 0$,

при $0 < x \leq 1$, $F(x) = 0 + 0,024 = 0,024$,

при $1 < x \leq 2$, $F(x) = 0,024 + 0,188 = 0,212$,

при $2 < x \leq 3$, $F(x) = 0,212 + 0,452 = 0,664$,

при $x > 3$, $F(x) = 0,664 + 0,336 = 1$.

Построим график функции распределения:

