

Геометрическое распределение случайной величины

Решение задачи

Задание. Вероятность выигрыша в лотерее равна p . Некто решил покупать по одному билету из каждого тиража, пока не выиграет.

А) найти вероятность того, что он будет участвовать в n -м тираже.

Б) вычислить среднее число приобретенных билетов.

В) предполагая, что выигрыш составляет a рублей, а цена одного билета - b рублей, вычислить средний выигрыш.

Решение. Случайная величина X = (Количество купленных билетов) распределена по геометрическому закону с параметром p (вероятность успеха в одном опыте, вероятность выиграть по билету). Тогда вероятности $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$ (первые $k-1$ неуспешных испытаний (билет не выиграл) с вероятностью $q = 1-p$ каждый, k -ое испытание с положительным результатом (билет выиграл) с вероятностью p).

Закон распределения имеет вид:

X	1	2	...	k	...
P	p	qp	...	$q^{k-1} \cdot p$...

Вероятность того, что он будет участвовать в n -м тираже, то есть число купленных билетов будет n или больше, равна

$$P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} q^{k-1} p = p \sum_{k=n}^{\infty} q^{k-1}.$$

Среднее число приобретенных билетов $M(X) = \frac{1}{p}$.

Если выигрыш составляет a рублей, а цена одного билета - b рублей, то средний выигрыш при покупке билетов будет $a - \left[\frac{1}{p} \right] b$. Здесь a - выигрыш (он наступает только

однажды), $\left[\frac{1}{p} \right]$ - среднее число купленных билетов, $\left[\frac{1}{p} \right] b$ - средняя сумма, потраченная на билеты.