# Система непрерывных случайных величин

## Пример решения задачи

**Задание.** Определить плотность вероятности, математические ожидания и корреляционную матрицу системы случайных величин $(X,Y)$, заданных в интервалах $(0\le x\le \pi/2)$ и $(0\le y\le \pi/2)$, если функция распределения системы $F(x,y)=\sin x\sin y$.

**Решение.** Плотность вероятности по определению:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\sin x\sin y)=\cos x\cos y.$$

Найдем функцию плотности вероятности $f_1(x)$ величины $X$.

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\cos y dy=\cos x\int_0^{\pi/2}\cos y dy=\cos x(\sin y)\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\cos x\left(\sin\frac{\pi}{2}-0\right)=\cos x,\ x\in[0,\pi/2].$$

Найдем функцию плотности вероятности $f_2(y)$ величины $Y$.

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\cos y dx=\cos y\int_0^{\pi/2}\cos x dx=\cos y(\sin x)\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\cos y\left(\sin\frac{\pi}{2}-0\right)=\cos y,\ y\in[0,\pi/2].$$

Найдем математические ожидания:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)x dx=\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot x dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos x dx & v=\sin x\end{vmatrix}=$$

$$=x\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1$$

Так как распределение для $Y$ такое же, то получим сразу: $M(Y)=M(X)=\frac{\pi}{2}-1.$

Дисперсия:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)x^2dx-(M(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)dx-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2=\int_0^{\pi/2} x^2\cos xdx-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\cos xdx & v=\sin x \end{vmatrix}=x^2\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2} 2x\sin xdx-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin xdx & v=-\cos x \end{vmatrix}=\frac{\pi^2}{4}+2x\cos x\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}\cos xdx-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\pi^2}{4}+\pi-1=\frac{\pi^2}{4}-2-\frac{\pi^2}{4}+\pi-1=\pi-3.$$

Так как распределение для величины $Y$ такое же, то получим сразу:
$D(Y)=D(X)=\pi-3.$

Найдем корреляционный момент. Для этого вычислим сначала $M(XY)$:

$$M(XY)=\iint_D xy\cdot f(x,y)dxdy=\iint_D \sin x\sin y\cdot xydxdy=\int_0^{\pi/2} x\sin xdx\cdot\int_0^{\pi/2} y\sin ydy=$$

$$=M(X)\cdot M(Y).$$

Корреляционный момент равен:
$\mu_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y)=0$.

Вычислим корреляционную матрицу системы случайных величин $(X,Y)$, которая будет иметь вид: $\|k_{ij}\|=\begin{Vmatrix}\pi-3 & 0 \\ 0 & \pi-3\end{Vmatrix}$.

**Ответ:**

$f(x,y)=\cos x\cos y$: $M[X]=M[Y]=\frac{\pi}{2}-1$; $\|k_{ij}\|=\begin{Vmatrix}\pi-3 & 0 \\ 0 & \pi-3\end{Vmatrix}$.