Непрерывная двумерная случайная величина

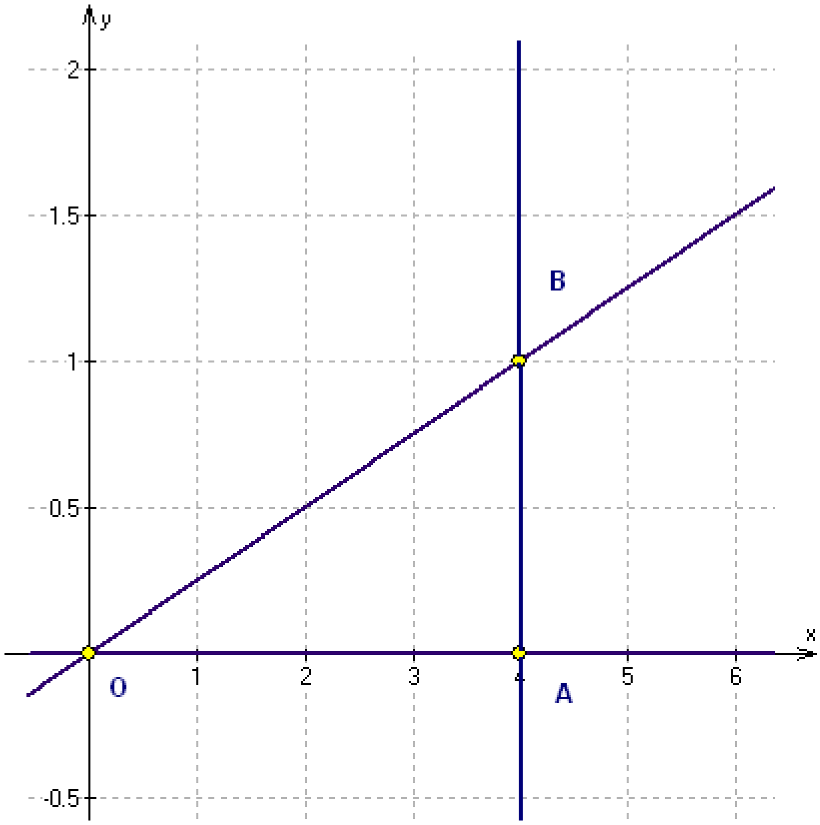
Пример решения задачи

Дана плотность распределения вероятностей системы (X,Y)

$$\rho(x,y)=\begin{cases} C, \textit{ в треугольнике } O(0,0), A(4,0), B(4,1), \\ 0, \textit{ в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти:
А) (9Т11) константу C;
Б) $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$;
В) (П51) m_x;
Г) (727) m_y;
Д) (3Р1) D_x;
Е) (П96) D_y;
Ж) (371) $\operatorname{cov}(X,Y)$;
З) (4Т12) r_{xy};
И) (151) $F(2,10)$;
К) (201) $M[X \mid Y=1/2]$.

Решение. Сделаем чертеж треугольника OAB, будем для краткости говорить о нем как об области D.



Прямая, ограничивающая треугольник снизу имеет уравнение $y=0$, сверху $y=\frac{1}{4}x$ или $x=4y$.

А) Найдем константу c из условия нормировки: $\iint\limits_D p(x,y)dxdy=1$. Получаем:

$$\iint\limits_D p(x,y)dxdy=\iint\limits_D cdxdy=c\iint\limits_D dxdy=c\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2c=1,\text{ откуда } c=\frac{1}{2}.$$

Получаем $p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},\ \text{â î áëàñò è}\ \ D,\\ 0,\ \text{â î ñò àëüí û õ ò î ÷êàõ}.\end{cases}$

Б) Найдем функции плотности вероятности $\rho_1(x),\ \rho_2(y)$ величин X и Y.

$$\rho_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(x,y)dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/4x}dy=\frac{1}{2}y\Big|_0^{1/4x}=\frac{1}{2}\frac{1}{4}x=\frac{1}{8}x,\ \ x\in[0;4]$$

$$\rho_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(x,y)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{4y}^{4}dx=\frac{1}{2}x\Big|_{4y}^{4}=\frac{1}{2}(4-4y)=2-2y,\ \ y\in[0;1]$$

В) Математическое ожидание:

$$m_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho_1(x)xdx=\int\limits_0^4\frac{1}{8}x^2dx=\left(\frac{1}{24}x^3\right)\Bigg|_0^4=\frac{4^4}{24}=\frac{8}{3}.$$

Г) Математическое ожидание:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_2(y) y dy = \int_0^1 (2-2y) y dy = \int_0^1 \left(2y - 2y^2\right) dy = \left(y^2 - \frac{2}{3} y^3 \right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Д) Дисперсия:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(x) x^2 dx - (m_x)^2 = \int_0^4 \frac{1}{8} x^3 dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{32} x^4\Big|_0^4 - \frac{64}{9} = \frac{4^4}{32} - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}.$$

Е) Дисперсия:

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_2(y) y^2 dy - (m_y)^2 = \int_0^1 (2-2y) y^2 dy - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \int_0^1 \left(2y^2 - 2y^3\right) dy - \frac{1}{9} =$$

$$= \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{2} y^4 \right)\Big|_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Ж) Ковариация:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \iint_D (x-m_x)(y-m_y)\rho(x,y) dxdy = \frac{1}{2} \iint_D (x-8/3)(y-1/3) dxdy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 (x-8/3) dx \int_0^{1/4x} (y-1/3) dy = \frac{1}{2} \int_0^4 (x-8/3) dx \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y \right)\Big|_0^{1/4x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 (x-8/3) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} x \right) \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(\frac{1}{32} x^3 - \frac{1}{6} x^2 + \frac{2}{9} x \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{128} x^4 - \frac{1}{18} x^3 + \frac{1}{9} x^2 \right)\Big|_0^4 = \frac{1}{9}.$$

З) $r_{xy} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D_x \cdot D_y}} = \dfrac{1/9}{\sqrt{8/9 \cdot 1/18}} = \dfrac{1}{2}.$

И) Значение функции распределения:

$$F(2,10) = \int_{-\infty}^{10} dy \int_{-\infty}^{2} \rho(x,y) dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} dy \int_{4y}^{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 dy\, x\Big|_{4y}^2 = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} (2-4y) dy =$$

;

$$= \frac{1}{2}\left(2y - 2y^2\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2}\left(1 - 2\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

К) $M\left[X \mid Y = 1/2\right]$.

Найдем $\rho(X\mid Y)=\dfrac{\rho(x,y)}{\rho_2(y)}=\dfrac{1/2}{2-2y}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-y}$.

Тогда

$$M(X\mid Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(X\mid Y)x\,dx=\int_{4y}^{4}\frac{1}{4}\frac{1}{1-y}x\,dx=\frac{1}{4(1-y)}\frac{1}{2}x^2\Big|_{4y}^{4}=$$

$$=\frac{\left(16-16y^2\right)}{8(1-y)}=\frac{2\left(1-y^2\right)}{1-y}=2(1+y).$$

Тогда $M[X\mid Y=1/2]=2(1+1/2)=3$.