

## Дискретная двумерная случайная величина

### Пример решения задачи

Задана дискретная двумерная случайная величина  $(X, Y)$ .

- А) найти безусловные законы распределения составляющих;
- Б) построить регрессию случайной величины  $Y$  на  $X$ ;
- В) построить регрессию случайной величины  $X$  на  $Y$ ;
- Г) найти коэффициент ковариации;
- Д) найти коэффициент корреляции.

$Y$	$X$				
	20	30	40	50	70
3	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01
4	0,04	0,3	0,06	0,03	0,01
5	0,02	0,03	0,06	0,07	0,05
9	0,05	0,03	0,04	0,02	0,03
10	0,03	0,02	0,01	0,01	0,02

**Решение.** Заполним таблицу полностью, суммируя вероятности по строкам и столбцам:

$Y$	$X$					$P_y$
	20	30	40	50	70	
3	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	<b>0,07</b>
4	0,04	0,3	0,06	0,03	0,01	<b>0,44</b>
5	0,02	0,03	0,06	0,07	0,05	<b>0,23</b>
9	0,05	0,03	0,04	0,02	0,03	<b>0,17</b>
10	0,03	0,02	0,01	0,01	0,02	<b>0,09</b>
$P_x$	<b>0,15</b>	<b>0,39</b>	<b>0,19</b>	<b>0,15</b>	<b>0,12</b>	<b>1</b>

Тогда получим безусловные законы распределения:

$X$	20	30	40	50	70
$P_x$	0,15	0,39	0,19	0,15	0,12

И

$Y$	3	4	5	9	10
$P_y$	0,07	0,44	0,23	0,17	0,09

Чтобы построить регрессии, найдем характеристики случайных величин  $X$  и  $Y$ .

$$\text{Математическое ожидание } M(x) = \sum x_i p_i = 38,2$$

$$\text{Дисперсия } D(x) = \sum x_i^2 p_i - (M(x))^2 = 1678 - 38,2^2 = 218,76$$

$$\text{Среднее квадратическое отклонение } \sigma(x) = \sqrt{D(x)} = 14,791$$

$x_i$	20	30	40	50	70	<b>Сумма</b>
$P_i$	0,15	0,39	0,19	0,15	0,12	<b>1</b>
$x_i P_i$	3	11,7	7,6	7,5	8,4	<b>38,2</b>
$x_i^2 P_i$	60	351	304	375	588	<b>1678</b>

Математическое ожидание  $M(y) = \sum y_i p_i = 5,55$

Дисперсия  $D(y) = \sum y_i^2 p_i - (M(y))^2 = 36,19 - 5,55^2 = 5,3875$

Среднее квадратическое отклонение  $\sigma(y) = \sqrt{D(y)} = 2,321$

$y_i$	3	4	5	9	10	<b>Сумма</b>
$P_i$	0,07	0,44	0,23	0,17	0,09	<b>1</b>
$y_i P_i$	0,21	1,76	1,15	1,53	0,9	<b>5,55</b>
$y_i^2 P_i$	0,63	7,04	5,75	13,77	9	<b>36,19</b>

Осталось подсчитать  $M(XY) = \sum p_{ij} x_i y_j = 214,5$ . Подсчеты занесем в таблицу:

$y_j$	$x_i$					$x_i P_{ij}$	$x_i y_j P_{ij}$
	20	30	40	50	70		
3	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	3	9
4	0,04	0,3	0,06	0,03	0,01	14,4	57,6
5	0,02	0,03	0,06	0,07	0,05	10,7	53,5
9	0,05	0,03	0,04	0,02	0,03	6,6	59,4
10	0,03	0,02	0,01	0,01	0,02	3,5	35

**Сумма 214,5**

Тогда коэффициент ковариации равен:

$$\mu_{xy} = M(x \cdot y) - M(x) \cdot M(y) = 214,5 - 38,2 \cdot 5,55 = 2,49$$

Коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{2,49}{14,791 \cdot 2,321} \approx 0,073.$$

Б) Построим регрессию случайной величины  $Y$  на  $X$ .

Уравнение регрессии  $Y$  на  $X$  имеет вид  $\bar{y}_x - M(y) = r_{xy} \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)} (x - M(x))$ . Подставляем все

величины:

$$\bar{y}_x - 5,55 = 0,073 \frac{2,321}{14,791} (x - 38,2)$$

$$\bar{y}_x = 0,011x + 5,112$$

В) Построим регрессию случайной величины  $X$  на  $Y$ .

Уравнение регрессии  $X$  на  $Y$  имеет вид:  $\bar{x}_y - M(x) = r_{xy} \frac{\sigma(x)}{\sigma(y)} (y - M(y))$ . Подставляем

все величины:

$$\bar{x}_y - 38,2 = 0,073 \frac{14,791}{2,321} (y - 5,55),$$

$$\bar{x}_y = 0,465y + 35,618.$$

Г) Найдем коэффициент ковариации:  $\mu_{xy} = 2,49$

Д) Найдем коэффициент корреляции.  $r_{xy} \approx 0,073$ .