Тема: Многоканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью

ЗАДАНИЕ. *Междугородный переговорный пункт имеет четыре телефонных аппарата. В среднем за сутки поступает 320 заявок на переговоры. Средняя длительность переговоров составляет 5 мин. Длина очереди не должна превышать 6 абонентов. Потоки заявок и обслуживаний простейшие. Определить характеристики обслуживания переговорного пункта в стационарном режиме (вероятность простоя каналов, вероятность отказа, вероятность обслуживания, среднее число занятых каналов, среднее число заявок в очереди, среднее число заявок в системе, абсолютную пропускную способность, относительную пропускную способность, среднее время заявки в очереди, среднее время заявки в системе, среднее время заявки под обслуживанием).*

РЕШЕНИЕ. Имеем систему массового обслуживания (СМО) с четырьмя каналами (четыре аппарата), с ожиданием и ограниченной очередью (6 мест). Получаем параметры $n=4$ (число каналов), $m=6$ (число мест в очереди), $\lambda=\frac{320}{60\cdot 24}=\frac{2}{9}$ (интенсивность входящего потока, заявок в минуту), $\mu=1/5$ (интенсивность потока обслуживания, одна заявка за 5 минут). Определим характеристики работы данной СМО в предельном режиме.

Вводим параметр $\psi=\frac{\lambda}{n\mu}=\frac{2/9}{4\cdot 1/5}=\frac{5}{18}$ - показатель нагрузки на один канал. Тогда предельные вероятности определяются по следующим формулам:

$$p_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\psi^k+\frac{n^n}{n!}\frac{\psi^{n+1}(1-\psi^m)}{1-\psi}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{4^0}{0!}(5/18)^0+\frac{4^1}{1!}(5/18)^1+\frac{4^2}{2!}(5/18)^2+\frac{4^3}{3!}(5/18)^3+\frac{4^4}{4!}(5/18)^4+\frac{4^4}{4!}\frac{(5/18)^5(1-(5/18)^6)}{1-5/18}\right)^{-1}\approx 0,328.$$

Остальные вероятности:

$p_k = \frac{n^k}{k!}\psi^k p_0$, $k = 1,2,3,4$ и $p_k = \frac{n^n}{n!}\psi^k p_0$, $k = 5,6,7,8,9,10$.

Вероятность простоя каналов: $p_0 \approx 0,328$.

Вероятность отказа в обслуживании $p_r = p_{10} = \frac{4^4}{4!}(5/18)^{10} \cdot 0,328 \approx 0,000009$.

Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания) $Q = 1 - p_r = 1 - 0,000009 = 0,99999$.

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = 0,99999 \cdot \frac{2}{9} = 0,22222$.

Среднее число занятых каналов $N_s = \frac{A}{\mu} = 0,22222 \cdot 5 = 1,1111$.

Среднее число заявок в очереди

$$N_{line} = \frac{n^n}{n!}\psi^{n+1}\frac{1-\psi^m(m+1-m\psi)}{(1-\psi)^2}p_0 = \frac{4^4}{4!}(5/18)^5\frac{1-(5/18)^6(6+1-6\cdot(5/18))}{(1-5/18)^2}\cdot 0,328 \approx 0,018.$$

Среднее число заявок в системе $N = N_s + N_{line} = 1,111 + 0,018 = 1,129$.

Среднее время заявки под обслуживанием $T_s = \frac{N_s}{\lambda} = \frac{1,1111}{2/9} = 4,99995$ минут, среднее время заявки в очереди $T_{line} = \frac{N_{line}}{\lambda} = \frac{0,018}{2/9} = 0,081$ минуты, среднее время заявки в системе $T = T_s + T_{line} = 4,99995 + 0,081 \approx 5,08$ минуты.