Пример решения задачи: поверхностный интеграл 1-го рода

Задание.

Вычислить интеграл $\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, *$S$ – поверхность*

$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad z\ge 0$.

Решение.

Интеграл по сферической поверхности рассчитывается по формуле:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS=\rho^2\iint\limits_{S_1} f(\rho\cos\varphi\sin\psi,\rho\sin\varphi\sin\psi,\rho\cos\psi)\sin\psi\,d\varphi\,d\psi. \quad (3)$$

Осуществим переход к сферической системе координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\psi; \\ y=\rho\sin\varphi\sin\psi; \\ z=\rho\cos\psi. \end{cases}$$

Тогда поверхность S (полусфера) задается в полярных координатах следующим образом:

$$S_1=\left\{(\rho,\varphi,\psi): \begin{array}{r} \rho=a \\ 0\le\psi\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{array}\right\}.$$

Поскольку

$$f(x,y,z)=x+y+z=a(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\sin\psi+\cos\psi),$$

то по формуле (3) получим:

$$\iint\limits_S (x+y+z)\,dS=a^3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\sin\psi+\cos\psi)\sin\psi\,d\psi=$$

$$=a^3\int\limits_0^{2\pi}\left[(\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\psi\,d\psi+\int\limits_0^{\pi/2}\cos\psi\sin\psi\,d\psi\right]d\varphi=J$$

Вычисляем отдельно внутренние интегралы:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\psi d\psi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\psi)\,d\psi = \frac{1}{2}\cdot\left[\int_0^{\pi/2} d\psi - \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos 2\psi d(2\psi)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\psi\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\cdot\sin 2\psi\Big|_0^{\pi/2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\pi}{2}-0\right] = \frac{\pi}{4};$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos\psi\sin\psi d\psi = -\int_0^{\pi/2}\cos\psi d(\cos\psi) = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2\psi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$J = a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{4}\cdot\cos\varphi + \frac{\pi}{4}\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}\right)d\varphi = \frac{\pi a^3}{4}\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi + \int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\right) + \frac{a^3}{2}\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{\pi a^3}{4}\cdot\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{\pi a^3}{4}\cdot\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^3}{2}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi a^3.$$