Пример решения задачи: поверхностные интегралы

ЗАДАНИЕ.

Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S z\,dxdy$, *S – внешняя сторона* $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

РЕШЕНИЕ.

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ - эллипсоид.

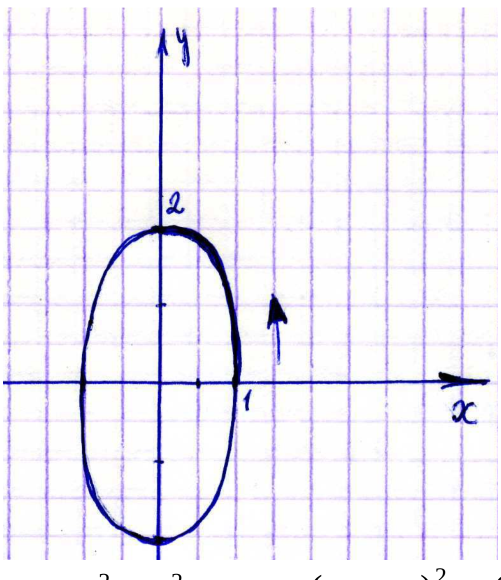
Проекцией эллипсоида на плоскость xOy является эллипс $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1 \quad (z=0)$.

В силу симметрии эллипсоида, найдем его верхнюю часть и результат умножим на 2.

Верхняя часть эллипсоида задается уравнением: $z=3\sqrt{1-\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}}$.

Следовательно, $\iint_S z\,dxdy=\iint_S 3\sqrt{1-\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}}\,dxdy$.

Перейдем к полярным координатам: $x=r\cos\varphi,\ y=2r\sin\varphi,\ dxdy=2rdrd\varphi$; учитывая симметричность области: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.



Т.к. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$, то $\frac{(r\cos\varphi)^2}{1}+\frac{(2r\sin\varphi)^2}{4}=1$;

$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1;$

$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 1;$

$r^2 = 1;$

$r = 1 \quad (r > 0).$

$$\iint\limits_S 3\sqrt{1-\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}}dxdy = \iint\limits_S 3\sqrt{1-\frac{(r\cos\varphi)^2}{1}-\frac{(2r\sin\varphi)^2}{4}}2rdrd\varphi =$$

$$= 3\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 2r\sqrt{1-\frac{r^2\cos^2\varphi}{1}-\frac{4r^2\sin^2\varphi}{4}}dr =$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}dr =$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2}dr = -12\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}d\left(1-r^2\right) =$$

$$= -12\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left.\frac{2\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1 = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}d\varphi = 8\cdot\frac{\pi}{2} = 4\pi$$

$$\iint\limits_S zdxdy = 2\cdot 4\pi = 8\pi$$

Ответ. 8π.