## Решение задачи по поверхностным интегралам скачано с <a href="https://www.matburo.ru/ex\_ma.php?p1=mapoint">https://www.matburo.ru/ex\_ma.php?p1=mapoint</a>

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

## Пример решения задачи: поверхностные интегралы

Задание.

Вычислить поверхностный интеграл  $\iint\limits_{S} z dx dy$  , S- внешняя сторона

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$
.

Решение.

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$
 - ЭЛЛИПСОИД.

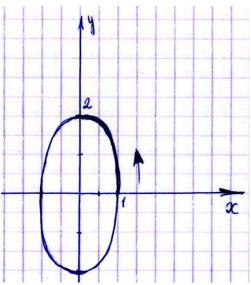
Проекцией эллипсоида на плоскость хОу является эллипс  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$  (z = 0).

В силу симметрии эллипсоида, найдем его верхнюю часть и результат умножим на 2.

Верхняя часть эллипсоида задается уравнением:  $z = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4}}$ .

Следовательно, 
$$\iint_{S} z dx dy = \iint_{S} 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4}} dx dy$$
.

Перейдем к полярным координатам:  $x = r\cos\varphi$ ,  $y = 2r\sin\varphi$ ,  $dxdy = 2rdrd\varphi$ ; учитывая симметричность области:  $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ .



T.k. 
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$
, to  $\frac{(r\cos\varphi)^2}{1} + \frac{(2r\sin\varphi)^2}{4} = 1$ ;

## Решение задачи по поверхностным интегралам скачано с <a href="https://www.matburo.ru/ex\_ma.php?p1=mapoint">https://www.matburo.ru/ex\_ma.php?p1=mapoint</a>

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{split} &r^{2}\cos^{2}\varphi+r^{2}\sin^{2}\varphi=1;\\ &r^{2}(\cos^{2}\varphi+\sin^{2}\varphi)=1;\\ &r^{2}=1;\\ &r=1\quad (r>0)\,.\\ &\iint_{S}3\sqrt{1-\frac{x^{2}}{1}-\frac{y^{2}}{4}}dxdy=\iint_{S}3\sqrt{1-\frac{(r\cos\varphi)^{2}}{1}-\frac{(2r\sin\varphi)^{2}}{4}}\,2rdrd\varphi=\\ &=3\cdot4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\!\!d\varphi\int_{0}^{1}2r\sqrt{1-\frac{r^{2}\cos^{2}\varphi}{1}-\frac{4r^{2}\sin^{2}\varphi}{4}}dr=\\ &=12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\!\!d\varphi\int_{0}^{1}2r\sqrt{1-r^{2}\cos^{2}\varphi-r^{2}\sin^{2}\varphi}dr=\\ &=12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\!\!d\varphi\int_{0}^{1}2r\sqrt{1-r^{2}}dr=-12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\!\!d\varphi\int_{0}^{1}\sqrt{1-r^{2}}d\left(1-r^{2}\right)=\\ &=-12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\!\!d\varphi\frac{2\left(1-r^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\bigg|_{0}^{1}=12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\!\!\frac{2}{3}d\varphi=8\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi\\ &\iint_{S}\!\!zdxdy=2\cdot4\pi=8\pi\\ &\mathbf{Otbet},\,8\pi\,. \end{split}$$