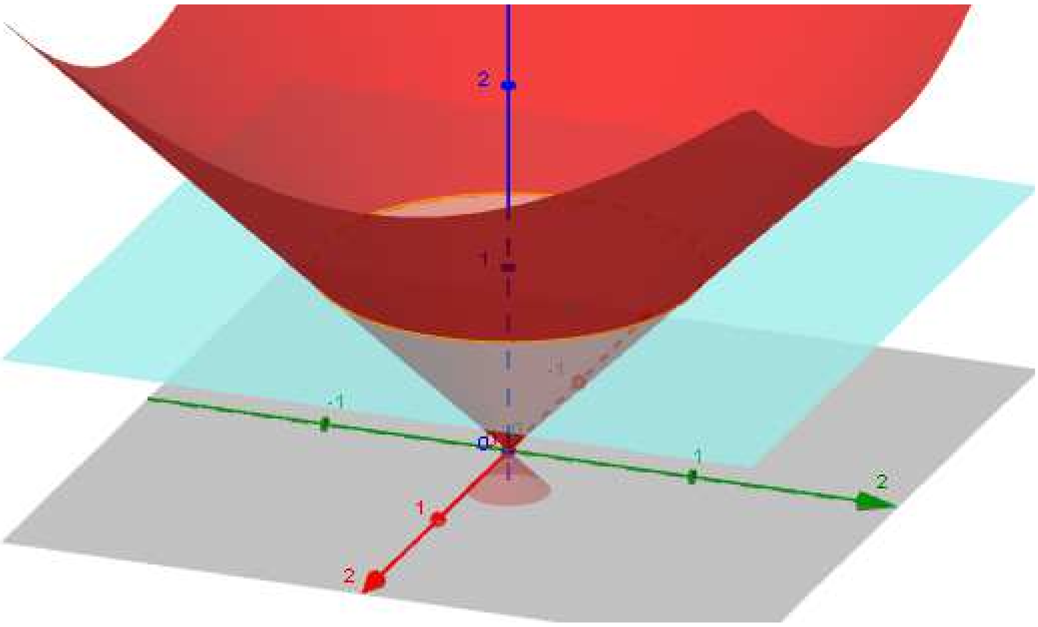
Пример решения задачи: поверхностные интегралы

Задание.

Найти массу участка поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $(0 \le z \le 1)$, *если плотность* $\delta = z$.

Решение.



Масса участка поверхности S находится как поверхностный интеграл первого рода

$$m = \iint_S \delta(x, y, z)ds$$

Поверхность S - часть конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенная между плоскостями $z = 0, z = 1$.

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\; z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};\; \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

Перейдем от поверхностного интеграла к двойному, проецируя поверхность S на плоскость Oxy:

$$m=\iint_S z ds=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}dxdy$$

Область D: $x^2+y^2\le 1$. Вычислим двойной интеграл, переходя к полярным координатам

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases};\quad \sqrt{x^2+y^2}=r;\quad dxdy=r\,drd\varphi$$

$$D:\ \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$$

$$m=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}dxdy=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 r\sqrt{2}\cdot r\,dr$$

$$\int_0^1 r\sqrt{2}\cdot r\,dr=\frac{\sqrt{2}}{3}r^3\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{3}d\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

ОТВЕТ. $m=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$