Решение задачи по поверхностным интегралам скачано с https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mapoint

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Пример решения задачи: поверхностные интегралы

Задание.

Вычислить поверхностные интегралы второго рода

$$\iint\limits_{S} (y^2 + z^2) dx \wedge dy,$$

где S — часть верхней стороны цилиндра $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le y \le b$.

Решение. Проекцией поверхности S на координатную плоскость xOy будет прямоугольник D:

$$D = \{(x, y): -a \le x \le a, 0 \le y \le b\}.$$

Искомый поверхностный интеграл можно представить в виде двойного интеграла:

$$\iint_{S} (y^{2} + z^{2}) dx \wedge dy = \iint_{D} (y^{2} + z^{2}(x)) dx dy = \iint_{D} (a^{2} + y^{2} - x^{2}) dx dy =$$

$$= \int_{-a}^{a} dx \int_{0}^{b} (a^{2} + y^{2} - x^{2}) dy = \int_{-a}^{a} (a^{2}y|_{0}^{b} + \frac{1}{3}y^{3}|_{0}^{b} - x^{2}y|_{0}^{b}) dx = \int_{-a}^{a} (a^{2}b + \frac{1}{3}b^{3} - bx^{2}) dx =$$

$$= a^{2}bx|_{-a}^{a} + \frac{1}{3}b^{3}x|_{0}^{a} - \frac{1}{3}bx^{3}|_{0}^{a} = a^{2}b \cdot 2a + \frac{1}{3}b^{3} \cdot 2a - \frac{1}{3}b \cdot 2a^{3} = \frac{4a^{3}b}{3} + \frac{2ab^{3}}{3} = \frac{2}{3}ab(2a^{2} + b^{2}).$$

Ombem:
$$\frac{2}{3}ab(2a^2+b^2)$$
.