Пример решения задачи: поверхностные интегралы

Задание.

Вычислить поверхностные интегралы второго рода

$$\iint_S (y^2+z^2)dx\wedge dy,$$

где S *− часть верхней стороны цилиндра* $z=\sqrt{a^2-x^2}$, $0\le y\le b$.

Решение. Проекцией поверхности S на координатную плоскость xOy будет прямоугольник D:

$$D=\{(x,y):\quad -a\le x\le a, 0\le y\le b\}.$$

Искомый поверхностный интеграл можно представить в виде двойного интеграла:

$$\iint_S (y^2+z^2)dx\wedge dy=\iint_D \left(y^2+z^2(x)\right)dxdy=\iint_D \left(a^2+y^2-x^2\right)dxdy=$$

$$=\int_{-a}^{a}dx\int_0^b \left(a^2+y^2-x^2\right)dy=\int_{-a}^{a}\left(a^2y\Big|_0^b+\frac{1}{3}y^3\Big|_0^b-x^2y\Big|_0^b\right)dx=\int_{-a}^{a}\left(a^2b+\frac{1}{3}b^3-bx^2\right)dx=$$

$$=a^2bx\Big|_{-a}^{a}+\frac{1}{3}b^3x\Big|_{-a}^{a}-\frac{1}{3}bx^3\Big|_{-a}^{a}=a^2b\cdot 2a+\frac{1}{3}b^3\cdot 2a-\frac{1}{3}b\cdot 2a^3=\frac{4a^3b}{3}+\frac{2ab^3}{3}=\frac{2}{3}ab\left(2a^2+b^2\right).$$

Ответ: $\frac{2}{3}ab\left(2a^2+b^2\right)$.