Пример решения задачи: поверхностные интегралы

Задание.

Вычислить интеграл

$$\iint_S (x-y)dS,$$

где S – *часть цилиндра* $x^2+y^2=a^2$, *лежащая внутри цилиндра* $z^2=a(a-x)$.

Решение.

Запишем параметризацию кругового цилиндра

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t, \quad t\in[0,2\pi], \quad h\in R. \\ z=h \end{cases}$$

Поверхность находится внутри цилиндра $z^2=a^2-ax$, то есть, $z^2\le a^2-ax$. Подставим параметрические представления в неравенство:

$$h^2\le a^2-a^2\cos t=a^2(1-\cos t)=2a^2\sin\frac{t}{2}.$$

Таким образом, $-a\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\le h\le a\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$.

Параметризация заданной поверхности S:

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t, \quad t\in[0,2\pi], \quad h\in\left[-a\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}, a\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\right]. \\ z=h \end{cases}$$

Таким образом,

$$r'_t=(-a\sin t, a\cos t, 0),$$

$$r'_h=(0,0,1).$$

Вычисляем компоненты E,G,F:

$$E=\left|r_t'\right|^2=a^2,\quad G=\left|r_h'\right|^2=1,\quad F=\left(r_t'\cdot r_h'\right)=0.$$

Элемент площади равен

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dtdh=adtdh.$$

Искомый интеграл равен

$$\iint_S (x-y)dS=\iint_D (a\cos t-a\sin t)\cdot adtdh=a^2\int_0^{2\pi}(\cos t-\sin t)dt\int_{-a\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}^{a\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}dh=$$

$$=2a^3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\cos t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt=2a^3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=4a^3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right)=$$

$$=4a^3\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left(\cos^2 t-\sin^2 t-2\sin t\cos t\right)\sin tdt=4a^3\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left(2\cos^2 t-1-2\sin t\cos t\right)\sin tdt=$$

$$=8a^3\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos^2 t\sin tdt-4a^3\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin tdt-8a^3\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos t\sin^2 tdt=-8a^3\sqrt{2}\left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\pi}+$$

$$+4a^3\sqrt{2}\cos t\Big|_0^{\pi}-8a^3\sqrt{2}\left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{\pi}=-\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}(-1-1)+4a^3\sqrt{2}(-1-1)-0=$$

$$=\frac{16a^3\sqrt{2}}{3}-8a^3\sqrt{2}=a^3\sqrt{2}\,\frac{16-24}{3}=-\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3.$$

Ответ: $-\frac{8}{3}a^3\sqrt{2}.$