Нелинейное программирование
Решение задачи методом покоординатного спуска Пауэлла (с параболической интерполяцией)

ЗАДАНИЕ.

Решить задачу безусловной оптимизации методом покоординатного спуска Пауэлла.

$$F(X) = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to max$$

$$x_1, x_2 \in E^2.$$

Выполнить 2 итерации.

$X^{(0)}$
(-1, 4)

РЕШЕНИЕ. Задача равносильна задаче о нахождении минимума функции

$G(X) = -x_1 - 4x_2 - x_1x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2$

Градиент функции $\nabla G(X) = (G_{x1}; G_{x2}) = (-1 - x_2 + 4x_1; -4 - x_1 + 4x_2)$.

$\nabla G(X_0) = (-9;13)$

$|\nabla G(X_0)| = \sqrt{81+169} \approx 15{,}81 > 0.1$

Вычислим значение функции в начальной точке

$G(X_0) = 23.$

Направление поиска:

$p^1 = [1;0]^T$

$p^2 = [0;1]^T$

Шаг №1. Сделаем шаг вдоль направления поиска $p^2 = [0;1]^T$

$X_1 = X_0 + hp^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4+h \end{pmatrix}.$

$G(X) = -x_1 - 4x_2 - x_1x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2$

$$G(X_1)=1-4(4+h)+4+h+2+2(4+h)^2 \to \min$$

$$G(X_1)=1-16-4h+4+h+2+32+16h+2h^2 \to \min$$

$$G(X_1)=23+13h+2h^2 \to \min$$

Найдем такой шаг h, чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления. Из необходимого условия существования экстремума функции ($G'(x_1)=0$):

4h+13 = 0.

Получим шаг: h = -13/4 = 3,25. Выполнение этого шага приведет в точку:

$$X_1=\begin{pmatrix}-1\\7{,}25\end{pmatrix}$$

Шаг №2. Сделаем шаг вдоль другого направления поиска

$$p^1=[1;0]^T \quad X_2=X_1+hp^1=\begin{pmatrix}-1\\7{,}25\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+h\\7{,}25\end{pmatrix}$$

$$G(X)=-x_1-4x_2-x_1x_2+2x_1^2+2x_2^2$$

$$G(X_2)=h-1-52{,}5625+7{,}25-7{,}25h+2(-1+h)^2+105{,}125 \to \min$$

$$G(X_2)=-const-10{,}25h+2h^2 \to \min$$

Найдем такой шаг h, чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления. Из необходимого условия существования экстремума функции ($G'(x_2)=0$):

4h-10,25 = 0. Получим шаг: h =2.5725.

Выполнение этого шага приведет в точку:

$$X_2=\begin{pmatrix}1{,}5725\\7{,}25\end{pmatrix}.$$

Шаг №3. Повторно сделаем шаг вдоль направления поиска $p^2=[0;1]^T$

$$X_3=X_2+hp^2=\begin{pmatrix}1{,}5725\\7{,}25\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5725\\7{,}25+h\end{pmatrix}$$

$$G(X)=-x_1-4x_2-x_1x_2+2x_1^2+2x_2^2$$

$$G(X_3)=-1{,}5725-29-4h-11{,}4-1{,}5725h+4{,}95+2(7{,}25+h)^2 \to \min$$

$$G(X_3) = -const - 13{,}4275h + 2h^2 \to \min$$

Найдем такой шаг h, чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления. Из необходимого условия существования экстремума функции ($G'(x_3)=0$):

4h = 13,4275. Получим шаг: h = 3,36.

Выполнение этого шага приведет в точку:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1{,}5725 \\ 10{,}61 \end{pmatrix}$$

Шаг №4. Выбираем сопряженное направление: $p^2 = x^3 - x^1$

$p^2 = [1{,}5725;10{,}61]^T - [-1;7{,}25]^T = [2{,}5725;3{,}36]^T$

G(X3) =-169,393.