Нелинейное программирование
Решение задачи методом возможных направлений

ЗАДАНИЕ. Решить задачу методом возможных направлений (расчеты вести с точностью до 4 знаков после запятой).

$$\max\left(-x_1^2+x_1x_2-2x_2^2+4x_1+6x_2\right)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 4 \\ x_1+2x_2\ge 2 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

Пусть $\overline{x_0}=(3,1)$, $\xi=0{,}4$.

РЕШЕНИЕ.

Метод возможных направлений – это класс методов нелинейного программирования, основанных на переходе от одной допустимой точки к другой из соображений выбора наилучшего значения целевой функции вдоль каждого направления.

Шаг 0

Обозначим заданную функцию $F=-x_1^2+x_1x_2-2x_2^2+4x_1+6x_2\to\max$

Найдём значение целевой функции в начальной точке

$F\left(\overline{x_0}\right)=-9+3\cdot 1-2+12+6=10$.

Шаг 1

Находим вектор градиента в общем виде $\nabla F=\left(-2x_1+x_2+4,x_1-4x_2+6\right)$ и в начальной точке $\overline{x_0}=(3,1)$

$\nabla F\left(\overline{x_0}\right)=(-1,5)$.

Длина вектора градиента

$\left|\nabla F\left(\overline{x_0}\right)\right|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}\approx 5{,}0990>\xi$.

Шаг 2

Координаты следующей точки

$\overline{x_1} = \overline{x_0} + \alpha_0 \cdot \nabla F\left(\overline{x_0}\right) = (3-\alpha_0, 1+5\alpha_0)$.

Найдём такие значения параметра, чтобы новая точка принадлежала области допустимых решений задачи

$$\begin{cases} 3-\alpha_0+1+5\alpha_0 \le 4 \\ 3-\alpha_0+2+10\alpha_0 \ge 2 \\ 3-\alpha_0 \ge 0 \\ 1+5\alpha_0 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4\alpha_0 \le 0 \\ 9\alpha_0 \ge -3 \\ \alpha_0 \le 3 \\ 5\alpha_0 \ge -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_0 \le 0 \\ \alpha_0 \ge -0{,}3333 \\ \alpha_0 \le 3 \\ \alpha_0 \ge -0{,}2 \end{cases} \qquad -0{,}2 \le \alpha_0 \le 0.$$

Шаг 3

Градиент в точке $\overline{x_1}$

$\nabla F\left(\overline{x_1}\right) = (-1+7\alpha_0, 5-21\alpha_0)$.

Из соображений $\nabla F\left(\overline{x_1}\right) \cdot \nabla F\left(\overline{x_0}\right) = 0$ находим максимальное значение параметра

$\nabla F\left(\overline{x_1}\right) \cdot \nabla F\left(\overline{x_0}\right) = (-1+7\alpha_0)\cdot(-1) + (5-21\alpha_0)\cdot 5 = 26-112\alpha_0 = 0$,

откуда

$\alpha_0 \approx 0{,}2321$.

Поскольку это значение располагается правее отрезка $-0{,}2 \le \alpha_0 \le 0$, нужно принять $\alpha_0 = 0$, однако это значение не даёт перехода в новую точку, поскольку текущая точка является наилучшей по данному направлению.

Шаг 4

Ограничение $x_1 + x_2 \le 4$ активно в точке $\overline{x_0}$. Обозначим вектор коэффициентов при переменных $a_0 = (1,1)$.

Тогда выберем направление $S_0 = (b_1, b_2)$ из условия равенства нулю скалярного произведения векторов $a_0 S_0 = 0$

$a_0 S_0 = b_1 + b_2 = 0$;

$b_2 = -b_1$.

Находим единичный вектор из условия $|S_0| = 1$. Длина вектора S_0

$$|S_0| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{b_1^2 + (-b_1)^2} = \sqrt{2b_1^2} = \sqrt{2}b_1 = 1;$$

откуда

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071.$$

Тогда $b_2 = -b_1 \approx -0{,}7071$.

Тогда $S_0 = (0{,}7071, -0{,}7071)$.

Шаг 5

Новую точку находим формуле

$$\overline{x_1} = \overline{x_0} + \alpha_0 \cdot S_0 = (3 + 0{,}7071\alpha_0, 1 - 0{,}7071\alpha_0).$$

Ограничим параметр так, чтобы точка не выходила за пределы области допустимых значений переменных. Вообще говоря, первое условие будет выполняться автоматически, поскольку мы проводим поиск вдоль прямой $x_1 + x_2 = 4$, но мы не будем удалять его из системы.

$$\begin{cases} 3 + 0{,}7071\alpha_0 + 1 - 0{,}7071\alpha_0 \le 4 \\ 3 + 0{,}7071\alpha_0 + 2 - 1{,}4142\alpha_0 \ge 2 \\ 3 + 0{,}7071\alpha_0 \ge 0 \\ 1 - 0{,}7071\alpha_0 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 \le 4 \\ \alpha_0 \le 4{,}2426 \\ \alpha_0 \ge -4{,}2426 \\ \alpha_0 \le 1{,}4142 \end{cases} \quad -4{,}2426 \le \alpha_0 \le 1{,}4142.$$

Шаг 6

Находим параметр α_0, доставляющий максимум функции F в направлении вектора S_0. Для этого подставим координаты точки $\overline{x_1}$ в функцию F

$$h(\alpha_0) = F(\overline{x_1}) = 10 - 4{,}2426\alpha_0 - 2\alpha_0^2;$$

находим производную

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha_1} = -4{,}2426 - 4\alpha_0;$$

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha_1} = 0 \text{ при } -4{,}2426 - 4\alpha_0 = 0;$$

$$4{,}2426 + 4\alpha_0 = 0;$$

$\alpha_0 \approx -1{,}0607$, и это точка максимума, т.к. $\dfrac{\partial^2 h}{\partial \alpha_1^2} = -4 < 0$.

Это значение входит в промежуток $-4{,}2426 \le \alpha_0 \le 1{,}4142$, поэтому принимаем $\alpha_0 \approx -1{,}0607$. Тогда $\overline{x_1} = (2{,}25,\ 1{,}75)$.

Шаг 7

Значение целевой функции и вектор градиента в текущей точке

$$F(\overline{x_1}) = -2{,}25^2 + 2{,}25 \cdot 1{,}75 - 2 \cdot 1{,}75^2 + 4 \cdot 2{,}25 + 6 \cdot 1{,}75 = 12{,}25$$

$$\nabla F(\overline{x_1}) = (1{,}25, 1{,}25).$$

Так как скалярное произведение векторов

$$\nabla F(\overline{x_1}) \cdot S_0 = 1{,}25 \cdot 0{,}7071 + 1{,}25 \cdot (-0{,}7071) = 0,$$

то найденная точка является искомым оптимальным решением.

Ответ:

$\max\left(-x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2\right) = 12{,}25$ достигается в точке $\overline{x_1} = (2{,}25, 1{,}75)$.