Нелинейное программирование, решение задачи методом Франка-Вульфа

ЗАДАНИЕ. Решить задачу методом Франка-Вульфа (расчеты вести с точностью до 4 знаков после запятой).

$$\max\left(-x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Пусть $\overline{x_0} = (3,1)$.

РЕШЕНИЕ.

Метод Франка-Вульфа является вычислительной схемой метода линейных комбинаций. В основе метода лежит представление нелинейной функции F общего вида в виде ряда Тейлора до членов первого порядка в окрестности допустимой точки $\overline{x_k}$, полученной на k-й итерации. Это соответствует замене F линейной функцией F^k в окрестности точки $\overline{x_k}$.

Шаг 0

Обозначим заданную функцию $F = -x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 \to \max$

Найдём значение целевой функции в начальной точке

$F\left(\overline{x_0}\right) = -9 + 3\cdot 1 - 2 + 12 + 6 = 10$.

Шаг 1

Находим вектор градиента в общем виде

$\nabla F = \left(-2x_1 + x_2 + 4, x_1 - 4x_2 + 6\right)$.

Вычислим градиент в точке $\overline{x_0} = (3,1)$

$\nabla F\left(\overline{x_0}\right) = (-1, 5)$.

Шаг 2

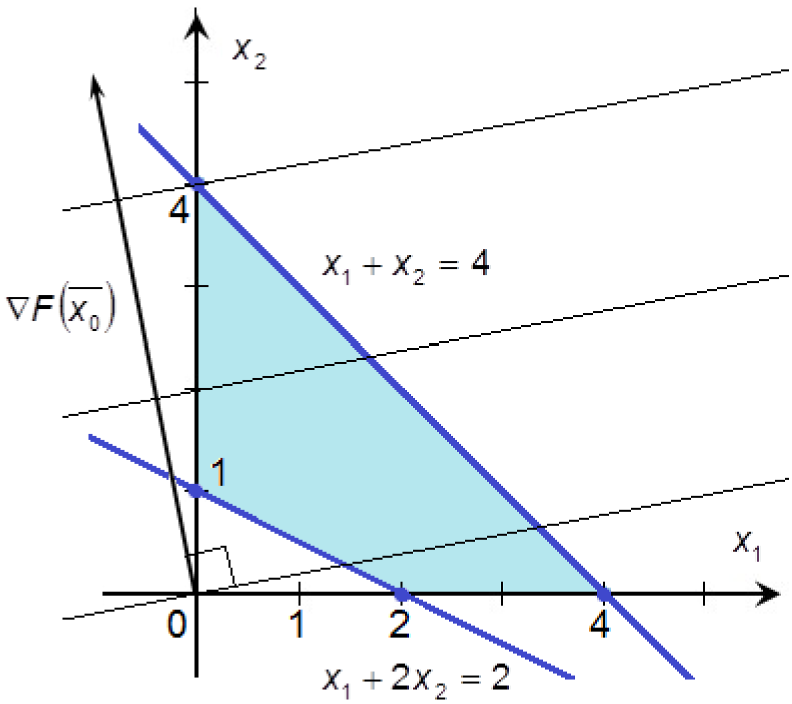
Используя координаты вектора $\nabla F\left(\overline{x_0}\right) = (-1, 5)$ в качестве коэффициентов при переменных в линеаризованной функции, решим задачу линейного программирования

$$F^0 = -x_1 + 5x_2 \to \max$$

при тех же ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Найдём решение, например, графическим методом. Строим прямые $x_1 + x_2 = 4$ и $x_1 + 2x_2 = 2$ по точкам и определяем область допустимых значений переменных как пересечение областей решений всех неравенств системы ограничений. Затем по линиям уровня, перпендикулярным вектору $\nabla F\left(\overline{x_0}\right)$, движемся в направлении этого вектора и находим точку максимума



Получаем, что точкой максимума для линеаризованной задачи является $\overline{x^0}^* = (0,4)$, а $F^0{}_{\max} = -0 + 5 \cdot 4 = 20$.

Шаг 3

Следующую точку находим по формуле $\overline{x_1} = \overline{x_0} + \alpha_0\left(\overline{x^0}^* - \overline{x_0}\right)$.

$\overline{x_1} = \left(3 + \alpha_0(0-3), 1 + \alpha_0(4-1)\right) = \left(3 - 3\alpha_0, 1 + 3\alpha_0\right)$.

Найдём значение целевой функции в этой точке

$$h(\alpha_0) = F\left(\overline{x_1}\right) = -(3-3\alpha_0)^2 + (3-3\alpha_0)(1+3\alpha_0) - 2(1+3\alpha_0)^2 +$$

$$+4(3-3\alpha_0) + 6(1+3\alpha_0) = -36\alpha_0{}^2 + 18\alpha_0 + 10.$$

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha_0} = 18 - 72\alpha_0;$$

$\dfrac{\partial h}{\partial \alpha_0} = 0$ при $18 - 72\alpha_0 = 0$;

$\alpha_0 = 0{,}25$ – точка максимума, поскольку $\dfrac{\partial^2 h}{\partial \alpha_0{}^2} = -72 < 0$.

Подставляя это значение, получаем

$\overline{x_1} = (3 - 0{,}75, 1 + 0{,}75) = (2{,}25, 1{,}75)$.

Значение целевой функции в ней

$F\left(\overline{x_1}\right) = -2{,}25^2 + 2{,}25 \cdot 1{,}75 - 2 \cdot 1{,}75^2 + 4 \cdot 2{,}25 + 6 \cdot 1{,}75 = 12{,}25$.

Шаг 4

Вычислим градиент в точке $\overline{x_1}$

$\nabla F\left(\overline{x_1}\right) = (1{,}25, 1{,}25)$.

Точка $\overline{x_1}$ лежит на прямой $x_1 + x_2 = 4$, а полученный вектор градиента $\nabla F\left(\overline{x_1}\right)$ перпендикулярен ей, поэтому найденная точка будет доставлять целевой функции максимум и $F_{\max} = F\left(\overline{x_1}\right) = 12{,}25$.

ОТВЕТ:

$\max\left(-x_1^2+x_1x_2-2x_2^2+4x_1+6x_2\right)=12{,}25$ достигается в точке

$\overline{x_1}=\left(2{,}25{,}1{,}75\right)$.