Метод наибольшего правдоподобия для геометрического распределения

Задание. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку параметра p геометрического распределения:

$P(X = x_i) = (1-p)^{x_i - 1} p$,

где x_i - число испытаний, произведенных до появления события, p - вероятность появления события в одном испытании.

Решение. Составим функцию правдоподобия

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i-1} p = p^n \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i-1}.$$

Тогда

$$\ln L(p) = \ln\left[p^n \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i-1} \right] = \ln\left[p^n \right] + \ln\left[\prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i-1} \right] =$$

$$= n\ln p + \sum_{i=1}^{n} \ln\left((1-p)^{x_i-1} \right) = n\ln p + \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)\ln(1-p) =$$

$$= n\ln p + \ln(1-p)\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1) = n\ln p + \ln(1-p)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) =$$

$$= n\ln p + \ln(1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i - n\ln(1-p).$$

Условия экстремума:

$$\frac{d\ln L}{dp} = \left(n\ln p + \ln(1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i - n\ln(1-p) \right)' = n\frac{1}{p} + \frac{-1}{1-p}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\frac{-1}{1-p} = 0,$$

$$n\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\frac{1}{p-1} = 0,$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right) = -n\frac{1}{p}$$

$$-\frac{p-1}{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{n},$$

$$\frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - 1,$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$p = 1/\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Таким образом, в качестве оценки получаем: $p^* = 1/\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 1/\overline{x}_B$.