

Тема: Метод максимального правдоподобия

ЗАДАНИЕ.

Случайная величина – время безотказной работы изделия имеет показательное распределение. В таблице приведены данные по времени работы в часах для 1000 изделий. Найти методом максимального правдоподобия точечную оценку неизвестного параметра λ .

x_i	5	15	25	35	45	55	65
n_i	365	245	150	100	70	45	25

РЕШЕНИЕ.

Пусть случайная величина ξ - время безотказной работы изделия имеет показательное распределение с параметром λ .

Составим функцию правдоподобия

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x_i}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ln L(\lambda) &= \ln \left[\lambda^n \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x_i} \right] = n \ln \lambda + \ln \left[\prod_{i=1}^n e^{-\lambda x_i} \right] = n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln(e^{-\lambda x_i}) = \\ &= n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n (-\lambda x_i) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n (x_i). \end{aligned}$$

Условия экстремума:

$$\frac{d \ln L}{d \lambda} = \left(n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n (x_i) \right)' = n \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^n (x_i) = 0,$$

$$n \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^n (x_i) = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\lambda = 1 / \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) = \frac{1}{x_B}.$$

Таким образом, в качестве оценки получаем: $\lambda^* = \frac{1}{x_B}$.

Вычисляем по данной выборке: $\overline{x_B} = \frac{1}{n} \sum x_i n_i = \frac{1}{1000} 20000 = 20$. Вычисления приведены в таблице ниже:

x_i	n_i	$x_i n_i$
5	365	1825
15	245	3675
25	150	3750
35	100	3500
45	70	3150
55	45	2475
65	25	1625
Сумма	1000	20000

Тогда искомая оценка $\lambda^* = \frac{1}{x_B} = \frac{1}{20} = 0,05$.

Ответ: $\lambda^* = 0,05$.