Тема: Метод наибольшего правдоподобия

Задание.

Случайная величина X (число появлений события A в m независимых испытаниях) подчинена закону распределения Пуассона с неизвестным параметром λ:

$P_m(X = x_i) = \dfrac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$, *где m - число испытаний в одном опыте, x_i - число появлений события в i-ом опыте ($i = 1, 2, ..., n$).*

Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ ,x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ распределения Пуассона.

Решение.

Составим функцию правдоподобия

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = e^{-\lambda n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}.$$

Тогда

$$\ln L(\lambda) = \ln\left[e^{-\lambda n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right] = \ln\left[e^{-\lambda n}\right] + \ln\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right] =$$

$$= -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(\lambda^{x_i}\right) - \ln(x_i!)\right] =$$

$$= -\lambda n + \sum_{i=1}^{n}\left[x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!)\right].$$

Условия экстремума:

$$\frac{d \ln L}{d\lambda} = -n + \sum_{i=1}^{n}\left[x_i \frac{1}{\lambda} - 0\right] = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = n,$$

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Таким образом, в качестве оценки получаем: $\lambda^* = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}_B$.