Тема: Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра

Задание. *Дано комплексное число* a. *Требуется:*

1) *записать число* a *в алгебраической и тригонометрической формах;*
2) *найти корни уравнения* $z^3+a=0$.

$a=1/\left(\sqrt{3}-i\right)$.

Решение.

$$a=\frac{1}{\left(\sqrt{3}-i\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)}{3+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$$ - алгебраическая форма.

Модуль числа $|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}/4\right)^2+(1/4)^2}=\sqrt{3/16+1/16}=1/2$. Аргумент $\varphi=\arg z$:

$$\begin{cases}\cos\varphi=\sqrt{3}/2,\\ \sin\varphi=1/2.\end{cases}\Rightarrow\varphi=\pi/6.$$

Таким образом, $z=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Найдем корни уравнения $z^3+a=0$:

$$z^3=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i,$$

$$z^3=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right),$$

$$z^3=\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

$z_{0,1,2}=w_{0,1,2}=\sqrt[3]{-a}$ вычислим по формуле Муавра.

$$w_0=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{-\frac{5}{6}\pi+0}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{5}{6}\pi+0}{3}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(-\frac{5}{18}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{18}\pi\right)\right).$$

$$w_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{-\frac{5}{6}\pi+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{5}{6}\pi+2\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{7}{18}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{18}\pi\right)\right).$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{-\frac{5}{6}\pi + 4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{5}{6}\pi + 4\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{19}{18}\pi\right) + i\sin\left(\frac{19}{18}\pi\right)\right).$$