

## Задача с решением

### Система дифференциальных уравнений в частных производных

ЗАДАНИЕ.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Проверим условие совместности:

$$\begin{aligned} A'_y + A'_z B - B'_x - B'_z A &= \left(\frac{z}{x}\right)'_y + \left(\frac{z}{x}\right)'_z \left(\frac{z}{y}\right) - \left(\frac{z}{y}\right)'_x - \left(\frac{z}{y}\right)'_z \left(\frac{z}{x}\right) = \\ &= 0 + \frac{1}{x} \cdot \frac{z}{y} - 0 - \frac{1}{y} \cdot \frac{z}{x} = 0. \end{aligned}$$

Так как условие совместности выполняется тождественно, то система имеет множество решений. Проинтегрируем первое равенство по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{z}{x}, \\ \ln z(x, y) &= \ln x + \ln \varphi(y) = \ln(x \cdot \varphi(y)), \\ z(x, y) &= x \cdot \varphi(y). \end{aligned}$$

Подставляя во второе уравнение, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= x \cdot \varphi'(y) = \frac{z}{y} = \frac{x \cdot \varphi(y)}{y}, \\ \varphi'(y) &= \frac{\varphi(y)}{y}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{\varphi} &= \frac{dy}{y}, \\ \ln \varphi(y) &= \ln y + \ln C = \ln Cy.. \\ \varphi(y) &= Cy. \end{aligned}$$

Задача по ДУ в ЧП скачана с [https://www.matburo.ru/ex\\_ma.php?p1=maducp](https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maducp)  
(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Окончательно получим:

$$z(x, y) = x \cdot \varphi(y) = Cxy.$$