

Тема: Собственные значения и векторы матрицы

ЗАДАНИЕ. Найти собственные значения и собственные вектора линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ:

Решим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 5 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 7-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -(2+\lambda)(7-\lambda-7\lambda+\lambda^2+4) + 2(-14+2\lambda+10) - 4(-4-5+5\lambda) = \\ &= -(22-16\lambda+2\lambda^2+11\lambda-8\lambda^2+\lambda^3) + (-8+4\lambda) + (36-20\lambda) = \\ &= -(22-5\lambda-6\lambda^2+\lambda^3+8-4\lambda-36+20\lambda) = -(\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6) = 0 \end{aligned}$$

Решая уравнение, находим собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ кратности 1. Найдем соответствующие собственные векторы.

Пусть $\lambda_1 = 1$. Решаем систему

$$\begin{cases} -3x - 2y - 4z = 0, \\ -2x - 2z = 0, \\ 5x + 2y + 6z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z - 2y - 4z = 0, \\ x = -z, \\ -5z + 2y + 6z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -z, \\ x = -z, \\ 2y = -z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1/2 \cdot z, \\ x = -z, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\text{Собственный вектор: } X_1 = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_2 = 2$. Решаем систему

$$\begin{cases} -4x - 2y - 4z = 0, \\ -2x - y - 2z = 0, \\ 5x + 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ -2x - y - 2z = 0, \\ 5x + 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -z, \\ 2z - y - 2z = 0, \\ -5z + 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -z, \\ y = 0, \\ z = z. \end{cases}$$

Собственный вектор: $X_2 = C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $\lambda_3 = 3$. Решаем систему

$$\begin{cases} -5x - 2y - 4z = 0, \\ -2x - 2y - 2z = 0, \\ 5x + 2y + 4z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 2z = 0, \\ -2x - 2y - 2z = 0, \\ -3x - 2z = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 2z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ -3x - 2z = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z = -3x, \\ y = -x - z, \\ x = x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -3/2 \cdot x, \\ y = 1/2 \cdot x, \\ x = x. \end{cases}$$

Собственный вектор: $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$