Пример решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ

Решите методом ветвей и границ следующую задачу коммивояжера:

$$\begin{pmatrix} \infty & 41 & 40 & 48 & 40 & 42 \\ 48 & \infty & 41 & 49 & 42 & 46 \\ 22 & 22 & \infty & 23 & 24 & 19 \\ 15 & 17 & 11 & \infty & 10 & 14 \\ 47 & 43 & 18 & 42 & \infty & 52 \\ 34 & 39 & 30 & 39 & 32 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение

Приведем исходную матрицу по строкам, вычитая из элементов каждой строки ее минимальный элемент.

–	41	<u>40</u>	48	40	42
48	–	<u>41</u>	49	42	46
22	22	–	23	24	<u>19</u>
15	17	11	–	<u>10</u>	14
47	43	<u>18</u>	42	–	52
34	39	<u>30</u>	39	32	–

→

–	1	0	8	0	2	**40**
7	–	0	8	1	5	**41**
3	3	–	4	5	0	**19**
5	7	1	–	0	4	**10**
29	25	0	24	–	34	**18**
4	9	0	9	2	–	**30**

Выделенные жирным шрифтом числа – это идеальный тур, полученный лексикографическим перебором.

Сумма констант приведения: 40 + 41 + 19 + 10 + 18 + 30 = 158.

Приведем исходную матрицу по столбцам, вычитая из элементов каждого столбца его минимальный элемент.

–	0	0	4	0	2
4	–	0	4	1	5
0	2	–	0	5	0
2	6	1	–	0	4
26	24	0	20	–	34
1	8	0	5	2	–
3	**1**	**0**	**4**	**0**	**0**

Сумма констант приведения: 3 + 1 + 0 + 4 + 0 + 0 = 8, сумма всех констант:

158 + 8 = 166.

Тур, проходящий только через ребра нулевой стоимости, будет, очевидно, минимальным. Для того, чтобы определить его стоимость, прибавим к нулю только что вычисленную константу 166:

0 + 166 = 166

Таким образом, мы получили нижнюю оценку стоимости класса всех возможных туров, т.е. минимальный тур в данной задаче не может стоить меньше, чем 166.

Назовем *оценкой* нуля в позиции (i, j) в матрице сумму минимальных элементов в i-й строке и j-м столбце (не считая сам этот ноль). Оценим теперь каждый ноль в приведенной матрице:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	–	0^{8}	0	4	0	2
2	4	–	0^{1}	4	1	5
3	0^{1}	2	–	0^{4}	5	0^{2}
4	2	6	1	–	0^{1}	4
5	26	24	0^{20}	20	–	34
6	1	8	0^{1}	5	2	–

Оценки, равные нулю, не указаны. Оценка k нуля, в позиции (i, j) означает следующее: если в тур не будет включен путь из i в j (стоимостью 0), то придется доплатить как минимум k. Поэтому, можно разделить класс всех возможных туров на два: туры, содержащие ребро (i, j) и туры, не содержащие его. Для последних минимальная оценка увеличится на k.

Рассмотрим ребро, соответствующее нулю с максимальной оценкой. В данном случае это ребро (5, 3). Таким образом, класс всех туров разбивается на два: содержащих ребро (5, 3) и не содержащих его. Нижняя оценка стоимости второго класса туров увеличивается до 166 + 20 = 186. Чтобы определить оценку для первого класса туров удалим из матрицы строку 5 и столбец 3. Обозначим ее как $C[(5,3)]$:

	1	**2**	**4**	**5**	**6**
1	–	0^{8}	4	0	2
2	4	–	4	1	5
3	0^{1}	2	0^{4}	5	0^{2}
4	2	6	–	0^{1}	4
6	1	8	5	2	–

Приведем ее заново и оценим нули.

	1	**2**	**4**	**5**	**6**	
1	–	0^{2}	4	0	2	**0**
2	3	–	3	0^{3}	4	**1**

3	0	2	0^4	5	0	**0**
4	2	6	–	0^2	4	**0**
6	0^1	7	6	1	–	**1**

Оценка класса туров с ребром (5, 3) составит 166 + 1 + 1 = 168.

Выберем теперь класс с наименьшей оценкой и повторим этот процесс для него. Затем из двух полученных классов выберем тот, у которого оценка минимальна и разобьем его. Так будем повторять до тех пор, пока не достигнем листа дерева, т. е. пока не получим матрицу 0×0:

Удаляем из матрицы 3-ю строку и 4-й столбец:

	1	**2**	**5**	**6**
1	–	0	0	2
2	3	–	0	4
4	2	6	0	4
6	0	7	1	–

→

	1	**2**	**5**	**6**
1	–	0^6	0	0^2
2	3	–	0^2	2
4	2	6	0^2	2
6	0^3	7	1	–

Т. к. последнюю матрицу удалось привести на 2 (по 6-му столбцу), то оценка класса туров с ребром (3, 4) увеличивается на 2 и становится равной 168 + 2 = 170.

Удаляем из матрицы 1-ю строку и 2-й столбец:

	1	**5**	**6**
2	3	0	2
4	2	0	2
6	0	1	–

→

	1	**5**	**6**
2	3	0	0
4	2	0	0
6	0^3	1	–

Т. к. последнюю матрицу удалось привести на 2 (по 6-му столбцу), то оценка класса туров с ребром (1, 2) увеличивается на 2 и становится равной 170 + 2 = 172.

Удаляем из матрицы 6-ю строку и 1-й столбец:

	5	**6**
2	0	0
4	0	0

Вершина (2,5) дерева будет соответствовать классу, содержащему ребра: (5, 3);
(3, 4); (1, 2); (6, 1); (2, 5); (4, 6).

Этот класс состоит из одного полного тура (1, 2, 5, 3, 4, 6, 1) со стоимостью 172.