Решение транспортной задачи методом потенциалов

ЗАДАНИЕ.

Составить математическую модель транспортной задачи и решить её методом потенциалов.

Завод имеет 3 цеха А, В, С и 4 склада №1,2,3,4. Цех А производит 30 тыс.штук изделий, цех В – 40 тыс. штук изделий, С – 20 тыс. штук изделий. Пропускная способность склада №1 - 20 тыс. штук изделий, №2 -30 тыс. штук изделий, №3 – 30 тыс.штук, №4 – 10 тыс. штук. Стоимость перевозки из цеха А соответственно в склады №1,2,3,4 1 тыс. штук изделий составляет 20, 30, 3, 4 р., из цеха В 1 тыс. – соответственно 3, 20, 5, 1 р., а из цеха С – соответственно 4, 30, 2, 6 р.

Составить такой план перевозок изделий, при котором расходы на перевозку 90 тыс. изделий были бы наименьшими.

РЕШЕНИЕ.

Запишем исходные данные в таблицу.

Цех	Склад				Производство цеха
	1	2	3	4	
А	20	30	3	4	30
В	3	20	5	1	40
С	4	30	2	6	20
Пропускная способность склада	20	30	30	10	$\sum 90$

1.Вводим переменные задачи (матрицу перевозок):

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}.$$

2.Записываем матрицу стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 3 & 4 \\ 3 & 20 & 5 & 1 \\ 4 & 30 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

3.Целевая функция задачи равняется сумме произведений всех соответствующих элементов матриц С и Х.

$$Z(X) = 20x_{11} + 30x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 3x_{21} + 20x_{22} + 5x_{23} + x_{24} + 4x_{31} + 30x_{32} + 2x_{33} + 6x_{34}.$$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на перевозки, должна достигать минимального значения.

4.Составим систему ограничений задачи:

сумма всех перевозок, стоящих в первой строке матрицы Х, должна равняться производству цеха А, сумме перевозок во второй строке должна равняться производству цеха В, и наконец сумма перевозок в третьей строке должна равняться производству цеха С.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20 \end{cases}$$

Это означает, что всё, что производится в цехах, вывозится полностью на склады.

Сумма перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы Х, должны быть равны пропускной способности каждого из складов.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10 \end{cases}$$

Это означает, что склады полностью забиты производимыми изделиями – сколько могут вместить.

Необходимо также учитывать, что перевозки не могут быть отрицательными:

$x_{ij} \geq 0$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4$.

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи записывается следующим образом:

Найти переменные задачи, обеспечивающие минимум целевой функции и удовлетворяющей системе ограничений и условиям не отрицательности.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

$$Z(X) = 20x_{11} + 30x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 3x_{21} + 20x_{22} + 5x_{23} + x_{24} + 4x_{31} + 30x_{32} + 2x_{33} + 6x_{34}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4$.

Решим транспортную задачу.

Для разрешимости транспортной задачи необходимо, чтобы суммарные запасы продукции у поставщиков (цехов) равнялись суммарной потребности потребителей (складов). Проверим это условие.

В нашем случае, потребность всех потребителей - 90 единиц продукции равна запасам всех поставщиков.

Начальный опорный план найдём методом минимальной стоимости. Наименьший элемент находится в ячейке A_2B_4 и равен 1, ставим перевозку в эту ячейку наибольшую из возможных 10 ед.груза. После этого столбец 4 вычёркиваем из рассмотрения. Далее минимальный элемент находится в ячейке A_3B_3 и равен 2, ставим в эту ячейку перевозку 20 ед. груза. Мы полностью израсходовали запасы цеха С, поэтому вычёркиваем строку 3 из дальнейшего рассмотрения.

Далее, минимальный элемент находится в ячейке A_1B_3 и равен 3, ставим перевозку – 10 ед. груза. Вычёркиваем третий столбец.

Минимальный элемент находится в ячейке A_2B_1 и равен 3, ставим перевозку - 20 ед. груза. Вычёркиваем первый столбец. Далее в ячейку A_2B_2 с наименьшей стоимостью ставим перевозку – 10 ед. груза. Вычёркиваем вторую строку. В ячейку A_1B_2 с наименьшей стоимостью ставим перевозку 20 ед. груза. Вычёркиваем первую строку. Итак, все запасы из цехов по складам распределены (таблица 1).

Таблица 1

Поставщик	Потребитель				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	- 20	**20** 30	**10** 3	- 4	30
A_2	**20** 3	**10** 20	- 5	**10** 1	40
A_3	- 4	- 30	**20** 2	- 6	20
Потребность	20	30	30	10	

Количество базисных ячеек $m+n-1=3+4-1=6$, что и требовалось. Мы нашли начальное решение, его стоимость равна:

$S=30\cdot 20+3\cdot 10+3\cdot 20+20\cdot 10+1\cdot 10+2\cdot 20=940$ ден.ед.

Произведём оценку полученного решения.

Для базисных клеток запишем.

Примем $u_2 = 0$.

$v_1 + u_2 = c_{21}$ $\quad$ $v_1 + u_2 = 3$ $\quad$ $v_1 = 3 - 0 = 3$

$v_2 + u_2 = c_{22}$ $\quad$ $v_2 + u_2 = 20$ $\quad$ $v_2 = 20 - 0 = 20$

$v_4 + u_2 = c_{24}$ $\quad$ $v_4 + u_2 = 1$ $\quad$ $v_4 = 1 - 0 = 1$

$v_2 + u_1 = c_{12}$ $\quad$ $v_2 + u_1 = 30$ $\quad$ $u_1 = 30 - 20 = 10$

$v_3 + u_1 = c_{13}$ $\quad$ $v_3 + u_1 = 3$ $\quad$ $v_3 = 3 - 10 = -7$

$v_3 + u_3 = c_{33}$ $\quad$ $v_3 + u_3 = 2$ $\quad$ $u_3 = 2 - (-7) = 9$

Заполним таблицу 2

Таблица 2

Поставщик	Потребитель				U_j
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	- 20	**20** 30	**10** 3	- 4	$u_1 = 10$
A_2	**20** 3	**10** 20	- 5	**10** 1	$u_2 = 0$
A_3	- 4	- 30	**20** 2	- 6	$u_3 = 9$
V_i	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = -7$	$v_4 = 1$	

Для свободных клеток найдём оценки.

$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 20 - (10 + 3) = 7$

$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 4 - (10 + 1) = -7$

$\Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 5 - (0 + (-7)) = 12$

$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 4 - (9 + 3) = -8$

$\Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 30 - (9 + 20) = 1$

$\Delta_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 6 - (9 + 1) = -4$

Видим, что в трёх клетках условие оптимальности не выполняется, так как они отрицательные. Требуется улучшение плана. Способ улучшения плана – это переброска груза по циклу. Из всех отрицательных оценок выбирают наибольшую по модулю. Поэтому свой выбор остановим на ячейке A_3B_1 (таблица 3).

Таблица 3

Поставщик	Потребитель				U_j
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	- / 20	**20** - / 30	+ **10** / 3	- / 4	$u_1 = 10$
A_2	- **20** / 3	**10** + / 20	- / 5	**10** / 1	$u_2 = 0$
A_3	+ - / 4	- / 30	- **20** / 2	- / 6	$u_3 = 9$
V_i	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = -7$	$v_4 = 1$	

Осуществим переброску груза по циклу на 20 единиц. В результате получим новый план перевозок (таблица 4).

Таблица 4

Поставщик	Потребитель				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	- 20	- 30	**30** 3	- 4	30
A_2	**0** 3	**30** 20	- 5	**10** 1	40
A_3	**20** 4	- 30	**0** 2	- 6	20
Потребность	20	30	30	10	

Стоимость перевозки равна $S = 4 \cdot 20 + 30 \cdot 20 + 30 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 780$ ден.ед. Стоимость уменьшилась.

Произведём оценку полученного решения.

Для базисных клеток.

Примем $u_2 = 0$.

$v_1 + u_2 = c_{21}$ $\quad v_1 + u_2 = 3$ $\quad v_1 = 3 - 0 = 3$

$v_2 + u_2 = c_{22}$ $\quad v_2 + u_2 = 20$ $\quad v_2 = 20 - 0 = 20$

$v_4 + u_2 = c_{24}$ $\quad v_4 + u_2 = 1$ $\quad v_4 = 1 - 0 = 1$

$v_1 + u_3 = c_{31}$ $\quad v_1 + u_3 = 4$ $\quad u_3 = 4 - 3 = 1$

$v_3 + u_3 = c_{33}$ $\quad v_3 + u_3 = 2$ $\quad v_3 = 2 - 1 = 1$

$v_3 + u_1 = c_{13}$ $\quad v_3 + u_1 = 3$ $\quad u_1 = 3 - 1 = 2$

Заполним таблицу 5.

Таблица 5

Поставщик	Потребитель				U_j
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	- 20	- 30	**30** 3	- 4	$u_1 = 2$
A_2	**0** 3	**30** 20	- 5	**10** 1	$u_2 = 0$
A_3	**20** 4	- 30	**0** 2	- 6	$u_3 = 1$
V_i	$v_1 = 3$	$v_2 = 20$	$v_3 = 1$	$v_4 = 1$	

Для свободных клеток найдём оценки.

$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 20 - (2 + 3) = 15$

$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 30 - (2 + 20) = 8$

$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 4 - (2 + 1) = 1$

$\Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 5 - (0 + 1) = 4$

$\Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 30 - (1 + 20) = 9$

$\Delta_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 6 - (1 + 1) = 4$

Все оценки положительны, следовательно, получен оптимальный план.

Ответ:

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вывод:

Цех А должен перевезти складу 1 - 20 тыс. изделий по цене 4 р. за одно изделие, цех В должен перевезти складу 2 – 30 тыс. изделий по цене 20 р. за одно изделие и складу 4 – 10 тыс. изделий по цене 1 р., цех А должен перевезти складу 3 – 30 тыс. изделий по цене 3 р. за одно изделие.

Следовательно, получили план перевозок изделий, при котором расходы на перевозку 90 тыс. изделий наименьшие и составляют 780 тыс. руб.