

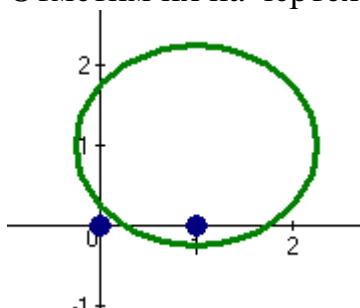
## Тема: Интеграл по замкнутому контуру

**Задание.** Вычислить интеграл.

$$\oint_{|z-1-i|=\frac{5}{4}} \frac{dz}{z^2(z-1)} .$$

**Решение.** Изобразим контур  $L = \left\{ |z-1-i| = \frac{5}{4} \right\}$  (окружность с центром (1,1) и радиусом 5/4) и найдем особые точки подынтегральной функции:  $z=0$  и  $z=1$ .

Отметим их на чертеже.



Только точка  $z=1$  располагается внутри контура (по умолчанию предполагается, что контур обходят в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки, и тогда все расположенное слева при движении считается расположенным внутри контура).

Тогда, получаем по теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z-1-i|=\frac{5}{4}} \frac{dz}{z^2(z-1)} = \oint_{|z-1-i|=\frac{5}{4}} \frac{\frac{1}{z^2}}{z-1} dz = \left[ 2\pi i \left[ \frac{1}{z^2} \right]' \right]_{z=1} = \left[ -\frac{4\pi i}{z^3} \right]_{z=1} = -4\pi i .$$

**Ответ:**  $-4\pi i$