Решение модифицированным симплекс-методом задачи линейного программирования

ЗАДАНИЕ. *Решить задачу модифицированным симплекс-методом.*

Для производства двух видов изделий А и Б используется три типа технологического оборудования. На производство единицы изделия А оборудование первого типа используется а1=4 часов, оборудование второго типа а2=8 часов, а оборудование третьего типа а3=9 часов. На производство единицы изделия Б оборудование первого типа используется б1=7 часов, оборудование второго типа б2=3 часов, а оборудование третьего типа б3=5 часов.

На изготовление этих изделий оборудование первого типа может работать не более чем t1=49 часов, оборудование второго типа не более чем t2=51 часов, оборудование третьего типа не более чем t3=45 часов.

Прибыль от реализации единицы готового изделия А составляет АЛЬФА=6 рублей, а изделия Б – БЕТТА=5 рублей.

Составить план производства изделий А и Б, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

РЕШЕНИЕ. Составим математическую модель задачи.

Пусть план производства продукции (x_1, x_2), то есть производится x_1 единиц продукции А и x_2 единиц продукции В, по смыслу задачи $x_1, x_2 \ge 0$. Тогда целевая функция – прибыль от продажи такого количества изделий, составляет $F = 6x_1 + 5x_2 \to \max$, ее нужно максимизировать.

Составим ограничения, связанные с ограниченным количеством ресурсов.
При плане производства (x_1, x_2) используется $4x_1 + 7x_2$ часов работы оборудования первого типа, всего доступно 49 часов работы, поэтому $4x_1 + 7x_2 \le 49$.
При плане производства (x_1, x_2) используется $8x_1 + 3x_2$ часов работы оборудования второго типа, всего доступно 51 часов работы, поэтому $8x_1 + 3x_2 \le 51$.
При плане производства (x_1, x_2) используется $9x_1 + 5x_2$ часов работы оборудования третьего типа, всего доступно 45 часов работы, поэтому $9x_1 + 5x_2 \le 45$.

Пришли к задаче линейного программирования:
$F = 6x_1 + 5x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 49, \\ 8x_1 + 3x_2 \le 51, \\ 9x_1 + 5x_2 \le 45, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

.

Приводим ее к каноническому виду, вводя дополнительные переменные:

$F = 6x_1 + 5x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 49, \\ 8x_1 + 3x_2 + x_4 = 51, \\ 9x_1 + 5x_2 + x_5 = 45, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Базис для этой задачи - столбцы $\{x_3, x_4, x_5\}$. Записываем основную таблицу задачи:

Ограничения	Значение	x1	x2	x3	x4	x5
x3	49	4	7	1	0	0
x4	51	8	3	0	1	0
x5	45	9	5	0	0	1
Цел. функция	0	**-6**	-5	0	0	0

Оценки $(-6\ -5)$. Наименьшая оценка в столбце $x1$, вводим его в базис. Выбираем столбец для вывода, находя $\min\left\{\frac{49}{4}; \frac{51}{8}; \frac{45}{9}\right\} = \frac{45}{9} = 5$. Выводим из базиса $x5$.

Новый базис $\{x_3, x_4, x_1\}$. Пересчитываем элементы столбца базисных значений и значение целевой функции, и обращенный базис (как по методу Жордана-Гаусса, используя выбранный разрешающий элемент).

Базис	Значение	Обращение			aij
x3	49	1	0	0	4
x4	51	0	1	0	8
x5	45	0	0	1	**9**
Цел. функция	0	0	0	0	-6

Делим третью строку на 9, вычитаем из первой третью, умноженную на 4; вычитаем из второй третью, умноженную на 8; прибавляем к последней третью, умноженную на 6.

Получаем:

Базис	Значение	Обращение			aij
x3	**29**	1	0	**-4/9**	
x4	**11**	0	1	**-8/9**	
x1	**5**	0	0	**1/9**	
Цел. функция	**30**	0	0	**2/3**	

Находим новые симплекс-множители в последней строке $(0\ \ 0\ 2/3)$. Вычисляем оценки для следующего шага:

$$(0\ 0\ 2/3)\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} - (6\ \ 5) = (0\ \ -5/3\ )$$

Получили отрицательную оценку на второй позиции. План не оптимален, нужно вводить в него $x2$. Пересчитаем коэффициенты этого столбца по формуле (используя матрицу обращения предыдущего шага):

$$a_2' = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/9 \\ 0 & 1 & -8/9 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43/9 \\ -13/9 \\ 5/9 \end{pmatrix}.$$

Вносим этот столбец в таблицу (см. последний столбец). Выбираем переменную для вывода, находя $\min\left\{\frac{29}{43/9}; -; \frac{5}{5/9}\right\} = \frac{261}{43}$. Выводим из базиса $x3$.

Базис	Значение	Обращение			aij
x3	29	1	0	-4/9	**43/9**
x4	11	0	1	-8/9	-13/9
x1	5	0	0	1/9	5/9
Цел. функция	30	0	0	2/3	-5/3

Новый базис $\{x_2, x_4, x_1\}$. Пересчитываем элементы столбца базисных значений и значение целевой функции, и обращенный базис:

Базис	Значение	Обращение			aij
x2	261/43	9/43	0	-4/43	
x4	850/43	13/43	1	-44/43	
x1	70/43	-5/43	0	7/43	
Цел. функция	1725/43	15/43	0	22/43	

Находим новые симплекс-множители $(15/43\ \ 0\ 22/43)$. Вычисляем оценки:

$$\begin{pmatrix}15/43 & 0 & 22/43\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 8 & 3\\ 9 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

Отрицательных оценок нет. План оптимален, $x_1 = 70/43,\ x_2 = 261/43,\ F = 1725/43$.