

Задача по теории множеств с решением

ЗАДАНИЕ.

Проверить справедливость тождеств или включений, используя алгебру множеств и диаграммы Эйлера-Венна.

$$B \setminus A = B \cap (\overline{A \cup (\overline{A \cup B})}), \quad A / (B \cup C) = (A / B) / C$$

РЕШЕНИЕ.

$$A) \quad B \setminus A = B \cap (\overline{A \cup (\overline{A \cup B})}).$$

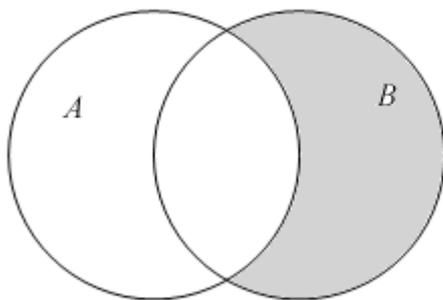
Рассмотрим правую часть и упростим ее:

$$\begin{aligned} B \cap (\overline{A \cup (\overline{A \cup B})}) &= B \cap (\overline{A \cup (\overline{A \cap B})}) = B \cap ((\overline{A \cup \overline{A}}) \cap (\overline{A \cup B})) = \\ &= B \cap (\overline{A} \cap (\overline{A \cup B})) = B \cap \overline{A} \cap (\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap (B \cap (\overline{A \cup B})) = \\ &= \overline{A} \cap ((B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B})) = \overline{A} \cap ((B \cap \overline{A}) \cup \emptyset) = \overline{A} \cap (B \cap \overline{A}) = \\ &= \overline{A} \cap B \cap \overline{A} = B \cap \overline{A} = B \setminus A. \end{aligned}$$

Получили, что левая и правая часть совпали.

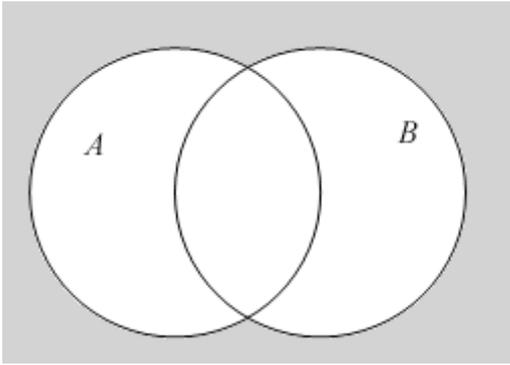
Докажем тождество с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Строим $B \setminus A$:

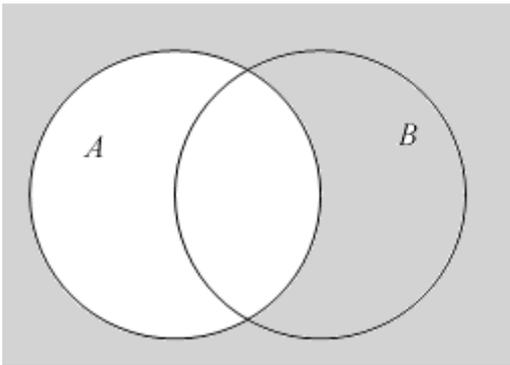


Строим пошагово $B \cap (\overline{A \cup (\overline{A \cup B})})$.

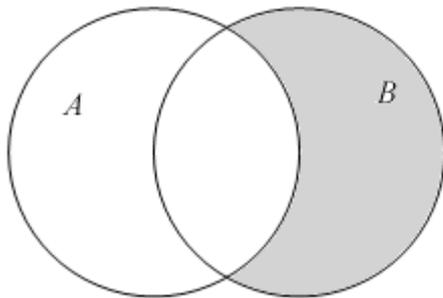
Шаг 1. $(\overline{A \cup B})$



Шаг 2. $\bar{A} \cup (\overline{A \cup B})$



Шаг 3. $B \cap (\bar{A} \cup (\overline{A \cup B}))$



Множества совпали.

$$\text{Б) } A/(B \cup C) = (A/B)/C.$$

Упростим левую и правую часть:

$$A/(B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}.$$

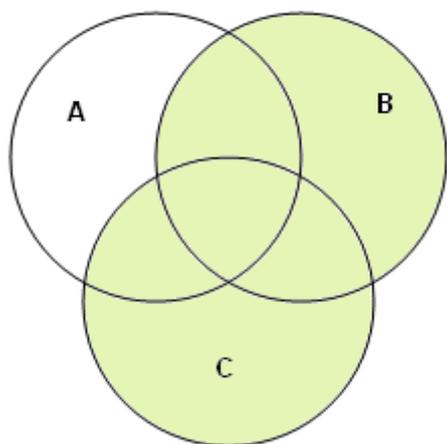
$$(A/B)/C = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}.$$

Получили, что левая и правая часть совпали.

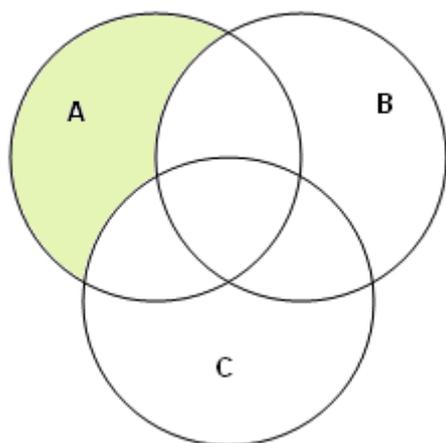
Докажем тождество с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Строим $A/(B \cup C)$

Шаг 1. $B \cup C$

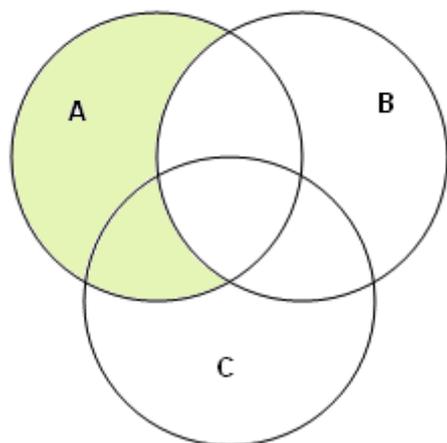


Шаг 2 $A/(B \cup C)$

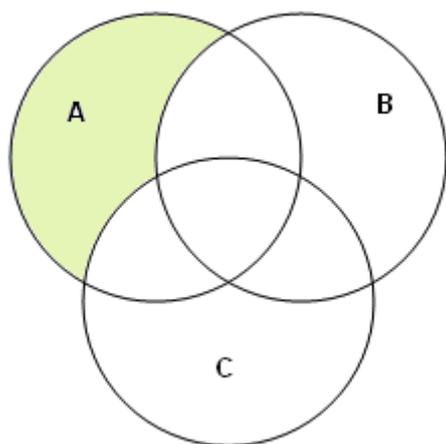


Строим $(A/B)/C$

Шаг 1. A/B



Шаг 2. $(A/B)/C$



Множества совпали.