Тема: Ряды

Задание. *Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям*

$$y'' = x^2 y - y^2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Решение. Пусть

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

тогда

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots ,$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots ,$$

Используя начальные условия, найдем a_0 и a_1:

$$y(0) = a_0 = 1, \quad y'(0) = a_1 = 0.$$

Найдем выражение для y^2:

$$y^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + 2a_0 a_2 x^2 + 2a_0 a_3 x^3 + \cdots + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + 2a_1 a_3 x^4 + \cdots + a_2^2 x^4 + \cdots$$

Подставляем все в исходное уравнение:

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots = x^2(1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) - (1 + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 + \cdots + +a_2^2 x^4 + \cdots),$$

$$(2a_2 + 1) + 6a_3 x + (12a_4 - 1 + 2a_2)x^2 + \cdots = 0,$$

откуда

$$2a_2 + 1 = 0,\ a_2 = -1/2, \quad 6a_3 = 0,\ a_3 = 0, \quad 12a_4 - 1 + 2a_2 = 0,\ a_4 = 1/6.$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения

$$y(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots .$$