Тема: Ряды

Задание. *Найти область сходимости указанного ряда. Ответ записать в виде промежутков и их объединений.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 8^n x^{3n} \sin(x/n).$$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{8^{n+1} x^{3n+3} \sin(x/(n+1))}{8^n x^{3n} \sin(x/n)} \right| = |8x^3| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |8x^3| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| < 1/2,$$

следовательно, при $|x| < 1/2$ ряд сходится, при $|x| > 1/2$ - расходится. В точках $x = 1/2, -1/2$ исследуем сходимость дополнительно.

1. При $x = 1/2$ ряд принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2n}\right).$$

По признаку сравнения получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n},$$

а этот ряд расходится как гармонический. Следовательно расходится и наш исходный ряд. (Мы воспользовались неравенством $\sin\alpha \geq \alpha/2$ при $0 < \alpha \leq \alpha_0 = \pi/3$ - при больших n оно, очевидно, выполняется.)

2. При $x = -1/2$ ряд принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница для знакопеременных рядов, т.к.

$$\sin\left(\frac{1}{2n+2}\right) < \sin\left(\frac{1}{2n}\right), \quad \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) = 0.$$

Область сходимости ряда: $[-1/2, 1/2)$.