Рекуррентные соотношения
Пример решения

Задание.

1. *Решить рекуррентное соотношение*

$$f(n+2) = -5f(n+1) - 4f(n) + 3n^2$$

с начальными условиями $f(0) = 2,\ f(1) = 3$

2. Проверить, удовлетворяет ли найденное решение начальным условиям и обращает ли оно рекуррентное соотношение в справедливое тождество.

Решение.

$f(n+2) = -5f(n+1) - 4f(n) + 3n^2$

Это линейное неоднородное рекуррентное уравнение.

Общим решением этого уравнения будет сумма общего решения соответствующего ему линейного однородного рекуррентного уравнения

$f(n+2) = -5f(n+1) - 4f(n)$

и некоторого частного решения неоднородного уравнения

$f(n+2) = -5f(n+1) - 4f(n) + 3n^2$

1) $k=2$, $a1=-5$, $a2=-4$, $g(n)= 3n^2$

2) Решим $f(n+2) = -5f(n+1) - 4f(n)$

Это линейное однородное рекуррентное уравнение. Его характеристическое уравнение имеет вид $r^2 = -5r - 4$

$r^2 + 5r + 4 = 0$

$D=9$

$r_1=(-5+3)/2=-1$

$r_2=(-5-3)/2=-4$

Соответственно, общее решение однородного рекуррентного уравнения записывается в виде

$f(n)_{одн} = c_1 * (-1)^n + c_2 * (-4)^n$

3) Найдем частное решение неоднородного уравнения

$\boldsymbol{f(n+2) = -5f(n+1) - 4f(n) + 3n^2}$

Поскольку $\lambda=1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде $f^*(n) = a_0+a_1n+a_2n^2$

$a_0+a_1(n+2)+a_2(n+2)^2 = -5(a_0+a_1(n+1)+a_2(n+1)^2) - 4(a_0+a_1n+a_2n^2) + \boldsymbol{3n^2}$

$a_0+a_1n+2a_1+a_2n^2+4a_2n+4a_2 = -5a_0 -5a_1n-5a_1-5a_2n^2 -10a_2n-5a_2-4a_0-4a_1n-4a_2n^2 + \boldsymbol{3n^2}$

$\boldsymbol{a_0+a_1n+2a_1+a_2n^2+4a_2n+4a_2 = -5a_0 -5a_1n-5a_1-5a_2n^2 -10a_2n-5a_2-4a_0-4a_1n-4a_2n^2 + 3n^2}$

$\boldsymbol{(10a_2+3)n^2+(10a_1+14a_2)n+10a_0+7a_1+5a_2=0}$

$$\begin{cases} 10a_2+3=0 \\ 10a_1+14a_2=0 \\ 10a_0+7a_1+5a_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_2=-0{,}3 \\ a_1 = 14\cdot 3 = 0{,}42 \\ 10a_0+7a_1+5a_2=0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$a_2=-0{,}3$$
$$a_1=0{,}42$$
$$a_0=\frac{-7\cdot 0{,}42+5\cdot 0{,}3}{10}=-0{,}144$$

$\boldsymbol{f^*(n)} = -0{,}144 + 0{,}42\, \boldsymbol{n} - 0{,}3\, \boldsymbol{n^2}$

$f(n) = f(n)_{одн} + f^*(n) = c_1\cdot(-1)^n + c_2\cdot(-4)^n - 0{,}144 + 0{,}42\, n - 0{,}3\, n^2$

4) c_1 и c_2 найдем из начальных условий.

$f(0) = c_1\cdot(-1)^0 + c_2\cdot(-4)^0 - 0{,}144 + 0{,}42\cdot 0 - 0{,}3\cdot 0^2 = 2$

$f(1) = c_1\cdot(-1)^1 + c_2\cdot(-4)^1 - 0{,}144 + 0{,}42 - 0{,}3 = 3$

$c_1 + c_2 = 2{,}144$

$-c_1 - 4c_2 = 3 + 0{,}144 - 0{,}42 + 0{,}3 = 3{,}024$

$c_1 + 4c_2 = -3{,}024$

$2{,}144 + 3c_2 = -3{,}024 \qquad c_2 = -1\dfrac{271}{375}$

$\Rightarrow \quad c_1 = 2{,}144 + 1\dfrac{271}{375}$,

$C_1 = 2\dfrac{432}{3000} + 1\dfrac{2168}{3000} = 3\dfrac{13}{15}$

f(n) =f(n)одн + *f*(n)* = $3\dfrac{13}{15}\cdot(-1)^n - 1\dfrac{271}{375}\cdot(-4)^n - 0{,}144 + 0{,}42n - 0{,}3n^2$

Ответ. f(n) $= 3\dfrac{13}{15}\cdot(-1)^n - 1\dfrac{271}{375}\cdot(-4)^n - 0{,}144 + 0{,}42n - 0{,}3n^2$

2. Проверим, удовлетворяет ли найденное решение начальным условиям и обращает ли оно рекуррентное соотношение в справедливое тождество.

$f(0) = 3\dfrac{13}{15}\cdot(-1)^0 - 1\dfrac{271}{375}\cdot(-4)^0 - 0{,}144 + 0{,}42\cdot 0 - 0{,}3\cdot 0^2 = 2$

$f(1) = 3\dfrac{13}{15}\cdot(-1)^1 - 1\dfrac{271}{375}\cdot(-4)^1 - 0{,}144 + 0{,}42 - 0{,}3 =$

$-3\dfrac{13}{15} + 1\dfrac{271}{375}\cdot 4 - 0{,}144 + 0{,}42 - 0{,}3 = 3$

$$3\frac{13}{15}\cdot(-1)^{n+2} - 1\frac{271}{375}\cdot(-4)^{n+2} - 0,144 + 0,42(n+2) - 0,3(n+2)^2 =$$

$$-5\left(3\frac{13}{15}\cdot(-1)^{n+1} - 1\frac{271}{375}\cdot(-4)^{n+1} - 0,144 + 0,42(n+1) - 0,3(n+1)^2\right)-$$

$$-4\left(3\frac{13}{15}\cdot(-1)^{n} - 1\frac{271}{375}\cdot(-4)^{n} - 0,144 + 0,42n - 0,3n^2\right) + 3n^2$$

$0=0$