

Матрица переходных вероятностей, стационарное распределение

Пример решения задачи

Задача. Задана матрица P_1 вероятностей перехода дискретной цепи Маркова из состояния i ($i=1,2$) в состояние j ($j=1,2$) за один шаг. Распределение вероятностей по состояниям в момент $t=0$ определяется вектором \bar{q} . Найти:

- 1) матрицу P_2 перехода из состояния i в состояние j за два шага;
- 2) распределение вероятностей по состояниям в момент $t=2$;
- 3) вероятность того, что в момент $t=1$ состоянием цепи будет $i=2$;
- 4) стационарное распределение.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = (0,1; 0,9).$$

Решение.

1) Найдем матрицу P_2 перехода из состояния i в состояние j за два шага по формуле:

$$\begin{aligned} P_2 &= (P_1)^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,2 & 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 \\ 0,2 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,2 & 0,2 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,64 + 0,04 & 0,16 + 0,16 \\ 0,16 + 0,16 & 0,64 + 0,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,68 & 0,32 \\ 0,32 & 0,68 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) Найдем распределение вероятностей по состояниям в момент $t=2$.

Начальное распределение $\bar{p}(0) = \bar{q} = (0,1; 0,9)$. Значит, распределение вероятностей по состояниям в момент $t=2$ можно найти по формуле:

$$\bar{p}(2) = \bar{p}(0) \cdot P_2 = (0,1; 0,9) \begin{pmatrix} 0,68 & 0,32 \\ 0,32 & 0,68 \end{pmatrix} = (0,356; 0,644).$$

3) Найдем вероятность того, что в момент $t=1$ состоянием цепи будет $i=2$. Найдем сначала распределение вероятностей по состояниям в момент $t=1$ по формуле:

$$\bar{p}(1) = \bar{p}(0) \cdot P_1 = (0,1; 0,9) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,26; 0,74)$$

Тогда искомая вероятность равна $p_2(1) = 0,74$.

4) Найдем стационарное распределение вероятностей \bar{p} из формулы $\bar{p} = \bar{p} \cdot P_1$. Получаем:

$$\begin{cases} p_1 = 0,8p_1 + 0,2p_2, \\ p_2 = 0,2p_1 + 0,8p_2, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} 10p_1 = 8p_1 + 2p_2, \\ 10p_2 = 2p_1 + 8p_2, \\ p_1 = 1 - p_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 - 10p_2 = 8 - 8p_2 + 2p_2, \\ 10p_2 = 2 - 2p_2 + 8p_2, \\ p_1 = 1 - p_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 4p_2, \\ 4p_2 = 2, \\ p_1 = 1 - p_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = 1/2, \\ p_1 = 1/2. \end{cases}$$

Искомое распределение: $\bar{p} = (1/2; 1/2)$.