Прикладная математика

Пример решения задачи о рационе питания

Задача. *Составить математическую модель задачи и решить ее симплекс-методом.*

Полноценное питание животных в питомнике включает в себя ежедневное потребление питательных веществ А и В, которые содержатся в продуктах вида I, II, III. Продукт I содержит питательные вещества А и В в количестве 3 и 3, продукт II - 1 и 1, продукт III - 9 и 8 г/кг при калорийности 3, 2, 5 ккал/кг соответственно. Себестоимость продуктов I, II, III составляет 2, 3, 1 ден. ед. Составить план питания, имеющий наименьшую стоимость, при котором ежедневное потребление питательного вещества А не превысит 180 г, вещества В будет не меньше 54 г, а калорийность составит 120 ккал.

Решение. Составим модель задачи.

Пусть план питания по типам продуктов вида I, II, III - это (x_1, x_2, x_3), эти величины неотрицательны $(x_1, x_2, x_3 \geq 0)$.

Тогда стоимость такого рациона будет $F = 2x_1 + 3x_2 + x_3$, ее нужно минимизировать: $F = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min$.

Выпишем ограничения задачи.

При плане (x_1, x_2, x_3) ежедневное потребление питательного вещества А будет $3x_1 + x_2 + 9x_3$, оно должно быть не больше 180 г, то есть $3x_1 + x_2 + 9x_3 \leq 180$.

При плане (x_1, x_2, x_3) ежедневное потребление питательного вещества В будет $3x_1+x_2+8x_3$, оно должно быть не меньше 54 г, то есть $3x_1+x_2+8x_3 \ge 54$.

При плане (x_1,x_2,x_3) калорийность будет равна $3x_1+2x_2+5x_3$, она должна быть равна 120 ккал, то есть $3x_1+2x_2+5x_3=120$.

Получили задачу линейного программирования:

$$F=2x_1+3x_2+x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1+x_2+9x_3 \le 180, \\ 3x_1+x_2+8x_3 \ge 54, \\ 3x_1+2x_2+5x_3=120, \\ x_1,x_2,x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решим ее. Приведем к каноническому виду.

$$F=2x_1+3x_2+x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1+x_2+9x_3+x_4=180, \\ 3x_1+x_2+8x_3-x_5=54, \\ 3x_1+2x_2+5x_3=120, \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Вводим искусственные переменные $z_1,z_2 \ge 0$ (так как в задаче нет единичного базиса):

$$F=2x_1+3x_2+x_3+Mz_1+Mz_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1+x_2+9x_3+x_4=180, \\ 3x_1+x_2+8x_3-x_5+z_1=54, \\ 3x_1+2x_2+5x_3+z_2=120, \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Получаем опорный план: $X=(0,0,0,180,0,54,120)$. Составляем первую симплекс-таблицу:

Базис	План	x1	x2	x3	4	5	1	2
x4	180	3	1	9				
z1	54	3	1	8		1		
z2	120	3	2	5				
-F	-174M	-6M+2	-3M+3	-13M+1				

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки (смотрим на коэффициенты при М, пока искусственный базис не выйдет), поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой $x3$, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов (столбец План) к положительным коэффициентам столбца $\min\left\{\frac{180}{9};\frac{54}{8};\frac{120}{5}\right\}=\frac{54}{8}$ (в строке $z1$). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	z1	z2
x4	477/4	-3/8	-1/8	0	1	9/8	-9/8	0
x3	27/4	3/8	1/8	1	0	-1/8	1/8	0
z2	345/4	9/8	11/8	0	0	5/8	-5/8	1
-F	-345/4M-27/4	-9/8M+13/8	-11/8M+23/8	0	0	-5/8M+1/8	13/8M-1/8	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки (смотрим на коэффициенты при М, пока искусственный базис не выйдет), поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой $x2$, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов (столбец План) к положительным коэффициентам столбца (в строке $x3$). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	1	2	x3	4	x5	1	2
x4	126			1		1	1	
x2	54			8		-1		
z2	12	3		-11		2	2	
-F	-12M -162	M-7		11M-23		-2M+3	M-3	

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки (смотрим на коэффициенты при М, пока искусственный базис не выйдет), поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой $x5$, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов (столбец План) к положительным коэффициентам столбца (в строке $z2$). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	z1	z2
x4	120	3/2	0	13/2	1	0	0	-1/2
x2	60	3/2	1	5/2	0	0	0	1/2
x	6	-	0	-	0	1	-	1

5		3/2		11/2			1	/2
-F	-180	-5/2	0	-13/2	0	0	M	M-3/2

Искусственный базис вышел. В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой $x3$, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к положительным коэффициентам столбца (в строке $x4$). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x3	240/13	3/13	0	1	2/13	0
x2	180/13	12/13	1	0	-5/13	0
x5	1398/13	-3/13	0	0	11/13	1
-F	-60	-1	0	0	1	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой $x1$, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к положительным коэффициентам столбца (в строке $x2$). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5

x3	15	0	-1/4	1	1/4	0
x1	15	1	13/12	0	-5/12	0
x5	111	0	1/4	0	3/4	1
-F	-45	0	13/12	0	7/12	0

В последней строке нет отрицательных оценок, искусственный базис вышел, значит, оптимальное решение задачи найдено:

$x_1 = 15, x_2 = 0,\ x_3 = 15,\ F_{\min} = 45$.

Таким образом, нужно использовать по 15 единиц продукции вида I и III, все ограничения будут удовлетворены. Стоимость рациона составит 45 ден. ед.