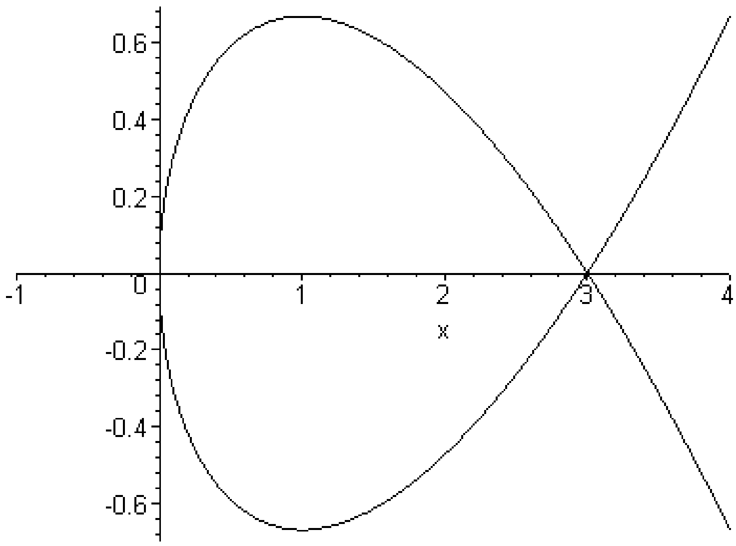
## Тема: вычисление площади поверхности вращения с помощью интеграла

ЗАДАНИЕ. *Найти площадь поверхности, образованной вращением петли кривой* $y^2 = \frac{x}{9a}(3a-x)^2$ *вокруг оси* $OX$ $(a>0)$.

РЕШЕНИЕ:

Сделаем схематический чертеж, положив $a=1$: $y^2 = \frac{x}{9}(3-x)^2$.




Точки пересечения с $OX$ данной кривой: $x=0,\ x=3a$.

Выражаем $y = \frac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x}(3a-x)$, производная

$$y' = \frac{1}{3\sqrt{a}}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}(3a-x)-\sqrt{x}\right] = \frac{1}{6\sqrt{ax}}(3a-x-2x) = \frac{1}{2\sqrt{ax}}(a-x).$$

Вычисляем дополнительно:

$$y\sqrt{1+(y')^2} = \frac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x}(3a-x)\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{ax}}(a-x)\right)^2} = \frac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x}(3a-x)\sqrt{1+\frac{1}{4ax}(a-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x}(3a-x)\sqrt{\frac{4ax+a^2-2ax+x^2}{4ax}} = \frac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x}(3a-x)\frac{1}{2\sqrt{ax}}\sqrt{(a+x)^2} = \frac{1}{6a}(3a-x)(a+x) =$$

$$= \frac{1}{6a}\left(3a^2+2ax-x^2\right).$$

Тогда искомая площадь поверхности вращения равна:

$$S=2\pi\int_0^{3a} y\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=2\pi\int_0^{3a}\frac{1}{6a}\left(3a^2+2ax-x^2\right)dx=\frac{\pi}{3a}\left(3a^2x+ax^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{3a}=$$

$$=\frac{\pi}{3a}\left(3a^2 3a+a9a^2-\frac{1}{3}3^3a^3\right)=\frac{\pi}{3a}\left(9a^3+9a^3-9a^3\right)=3a^2\pi.$$

Ответ: $3a^2\pi$ .