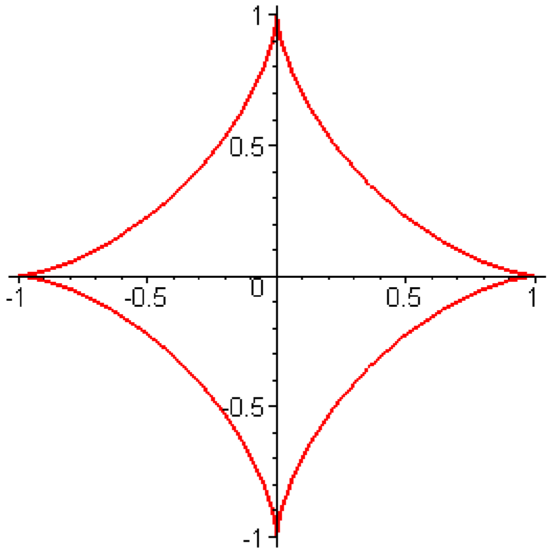
Тема: вычисление площади фигуры с помощью интеграла в параметрических координатах

Задание. *Найти площадь петли кривой*
$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$.

Решение:
Сделаем чертеж фигуры:



Так как явные петли в фигуре отсутствуют, вычислим площадь самой фигуры (как площадь части, лежащей в первой четверти, умноженную на 4, так как фигура симметричная).

Получаем:

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} y(t)x'(t)\,dt = 4\int_{\pi/2}^{0} \sin^3 t\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)\,dt = -12\int_{\pi/2}^{0} \sin^4 t\cdot\cos^2 t dt =$$

$$= 3\int_{0}^{\pi/2} \left(4\sin^2 t\cdot\cos^2 t\right)\sin^2 t dt = 3\int_{0}^{\pi/2} \left(2\sin t\cdot\cos t\right)^2 \sin^2 t dt =$$

$$= 3\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 2t\cdot\sin^2 t dt = \frac{3}{4}\int_{0}^{\pi/2} (1-\cos 4t)(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{4}\int_{0}^{\pi/2} (1-\cos 4t-\cos 2t+\cos 4t\cdot\cos 2t)\,dt = \frac{3}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{3}{4}\int_{0}^{\pi/2} \cos 4t\cdot\cos 2t dt =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} \left(\cos(4t-2t)+\cos(4t+2t)\right)dt = \frac{3\pi}{8}+\frac{3}{8}\int_{0}^{\pi/2} (\cos 2t+\cos 6t)\,dt =$$

$$= \frac{3\pi}{8}+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{6}\sin 6t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8}$.