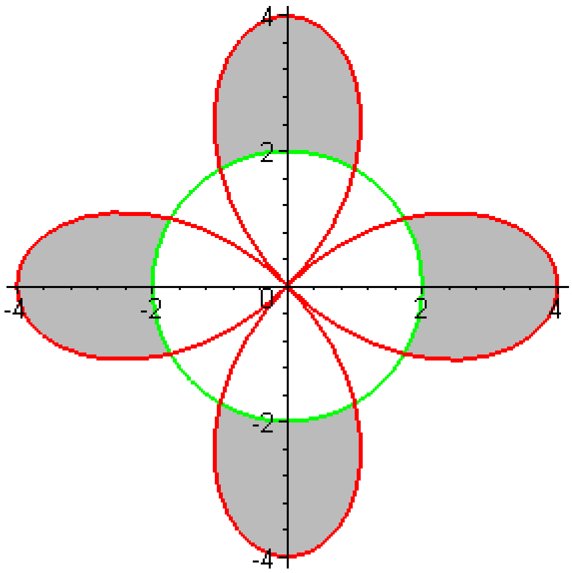
Тема: вычисление площади фигуры с помощью интеграла в полярных координатах

ЗАДАНИЕ. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:*
$\rho = 4\cos 2\varphi$, $\rho = 2$, $\rho \ge 2$.

РЕШЕНИЕ:
Сделаем схематический чертеж. Красным - $\rho = 4\cos 2\varphi$, зеленым - $\rho = 2$. Серым закрашена искомая фигура, которая состоит из 8 одинаковых частей.



Вычислим площадь одной восьмой данной фигуры (половины серого лепестка). Для этого найдем $\varphi = \varphi_0$ - угол, который определяет точку пересечения кривых. Получаем:

$$4\cos 2\varphi = 2,$$

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{2},$$

$$2\varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Получили $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$, то есть φ меняется от 0 до $\pi/6$, а ρ меняется от 2 до $4\cos 2\varphi$.

Тогда площадь равна:

$$I_{1/8}=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\varphi=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6}\left(16\cos^2 2\varphi-4\right)d\varphi=2\int_{0}^{\pi/6}\left(4\cos^2 2\varphi-1\right)d\varphi=$$

$$=2\int_{0}^{\pi/6}\left(4\frac{1+\cos 4\varphi}{2}-1\right)d\varphi=2\int_{0}^{\pi/6}\left(2+2\cos 4\varphi-1\right)d\varphi=2\int_{0}^{\pi/6}\left(1+2\cos 4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=2\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{0}^{\pi/6}=2\left(\pi/6+\frac{1}{2}\sin\left(4\pi/6\right)\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Искомая площадь всей фигуры равна: $I=8I_{1/8}=8\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{8\pi}{3}+4\sqrt{3}.$

Ответ: $\frac{8\pi}{3}+4\sqrt{3}..$