Микроэкономика, пример решения задачи
Производственная функция. Коэффициенты эластичности

ЗАДАНИЕ.

Производственная функция задается формулой $Q = 150K^{0,9}L^{0,5}$, где Q - выпуск, K – капитал, L - труд.

Найти:

а) Предельные продукты труда и капитала при K=16, L=125.

б) Коэффициенты эластичности выпуска по труду и капиталу и объяснить их экономический смысл для полученных значений.

РЕШЕНИЕ.

а) предельный продукт труда MQ_L– это прирост объема производства от каждой последующей единицы труда.

$$MQ_L = \frac{dQ}{dL} = 150 \cdot 0,5K^{0,9}L^{-0,5} = \frac{75K^{0,9}}{\sqrt{L}}$$

При K=16, L=125

$$MQ_L = \frac{75K^{0,9}}{\sqrt{L}} = \frac{75 \cdot 16^{0,9}}{\sqrt{125}} = \frac{75 \cdot \sqrt[10]{16^9}}{\sqrt{5 \cdot 25}} = \frac{75 \cdot \sqrt[10]{(2^4)^9}}{5\sqrt{5}} = \frac{15 \cdot \sqrt[10]{2^{36}}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{15 \cdot \sqrt[10]{2^{30}} \cdot \sqrt[10]{2^6}}{\sqrt{5}} = \frac{15 \cdot 2^3 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{\sqrt{5}} = \frac{15 \cdot 8 \cdot \sqrt[5]{8}}{\sqrt{5}} = \frac{120\sqrt[5]{8}}{\sqrt{5}} \approx 81,342.$$

Предельный продукт капитала MQ_K:

$$MQ_K = \frac{dQ}{dK} = 150 \cdot 0,9K^{-0,1}L^{0,5} = 135 \cdot \frac{\sqrt{L}}{\sqrt[10]{K}} = 135 \cdot \frac{\sqrt{125}}{\sqrt[10]{16}} = 135 \cdot \frac{\sqrt{5 \cdot 25}}{\sqrt[10]{2^4}} =$$

$$= 135 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt[5]{2^2}} = 135 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{675\sqrt{5}}{\sqrt[5]{4}} \approx 1143,9.$$

Т.к. частные производные положительны, увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска.

б) Коэффициенты эластичности выпуска по капиталу и труду для производствен-ной функции $Q = 150K^{0,9}L^{0,5}$ равны, соответственно, α = 0,9, β=0,5, т.к.

$$E_K(Q)=\frac{\frac{dQ}{dK}}{\frac{Q}{K}}=\frac{150\cdot 0,9K^{-0,1}L^{0,5}}{\frac{150K^{0,9}L^{0,5}}{K}}=\frac{0,9K^{-0,1}L^{0,5}}{K^{0,9-1}L^{0,5}}=0,9\frac{K^{-0,1}L^{0,5}}{K^{-0,1}L^{0,5}}=0,9=\alpha;$$

$$E_L(Q)=\frac{\frac{dQ}{dL}}{\frac{Q}{L}}=\frac{150\cdot 0,5K^{0,9}L^{-0,5}}{\frac{150K^{0,9}L^{0,5}}{L}}=\frac{0,5K^{0,9}L^{-0,5}}{K^{0,9}L^{0,5-1}}=0,5\frac{K^{0,9}L^{-0,5}}{K^{0,9}L^{-0,5}}=0,5=\beta.$$

Т.к. α = 0,9, то увеличение затрат капитала на 1% приведёт к увеличению выпуска на 0,9%.

Т.к. β = 0,5, то увеличение затрат труда на 1% увеличивает объем производства на 0,5%.

Т.к. α + β = 0,9+0,5 = 1,4>1, производственная функция непропорционально возрастает. Имеет место растущая эффективность факторов производства. Это означает, что если K и L увеличиваются в некоторой пропорции, то Q растет в большей пропорции.

В соответствии с допущением о конкурентности рынков факторов производства α и β можно рассматривать в качестве прогнозируемых долей дохода, полученного, соответственно, за счет капитала и труда. Если рынок труда имеет конкурентный характер, то ставка заработной платы (w) будет равна предельному продукту труда:

$$w=MQ_L=\frac{dQ}{dL}=\frac{\beta Q}{L}=81,342.$$

Следовательно, общая сумма заработной платы (wL) будет равна βQ, а доля труда в общем выпуске продукции (wL/Q) составит постоянную величину β=0,5. Аналогичным образом норма прибыли выражается через dQ/dK:

$\rho = MQ_K = \frac{dQ}{dK} = \frac{\alpha Q}{K} = 1143{,}9$ и, следовательно, общая прибыль (ρK) будет равна αQ,

а доля прибыли ($\rho K/Q$) будет постоянной величиной α=0,9.