Пример решения краевой задачи

ЗАДАНИЕ.

Решить краевую задачу, используя функцию Грина

$$y'' + 9y = x - \frac{\pi}{6},\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

РЕШЕНИЕ.

Построим вначале функцию Грина для краевой задачи

$$y'' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0. \qquad (5.16.2)$$

Покажем, что краевая задача имеет лишь тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Имеем $y(x) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$. Функция $G(x, \xi)$ удовлетворяет однородным условиям (5.16.2) только при $C_1 = C_2 = 0$, а значит $y(x) \equiv 0$, и функцию Грина (единственную) задачи (5.16.2) можно построить. Запишем выражение для функции Грина

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1\cos 3x + a_2\sin 3x & \text{при} \quad 0 \le x \le \xi; \\ b_1\cos 3x + b_2\sin 3x & \text{при} \quad \xi \le x \le \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Из непрерывности при $x = \xi$ получим

$(b_1 - a_1)\cos 3x + (b_2 - a_2)\sin 3x = 0.$

Скачок $G_x'(x,\xi)$ в точке $x = \xi$ равен 1, следовательно

$-3(b_1 - a_1)\sin 3x + 3(b_2 - a_2)\cos 3x = 1.$

Положим $c_1 = b_1 - a_1$, $c_2 = b_2 - a_2$. Тогда будем иметь

$c_1\cos 3\xi + c_2\sin 3\xi = 0;$

$-3c_1\sin 3\xi + 3c_2\cos 3\xi = 1.$

Откуда найдем, что

$$c_1 = -\frac{1}{3}\sin 3\xi,\ c_2 = \frac{1}{3}\cos 3\xi.$$

Используя краевые условия (5.16.2), получим $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, и, следовательно, $a_1 = \frac{1}{3}\sin 3\xi$, $b_2 = \frac{1}{3}\cos 3\xi$.

Итак, искомая функция Грина

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{3}\sin 3\xi\cos 3x & \text{при} \quad 0\le x\le \xi;\\ \frac{1}{3}\cos 3\xi\sin 3x & \text{при} \quad \xi\le x\le \frac{\pi}{6}.\end{cases}$$

(5.16.3)

Решение краевой задачи (5.16.1) запишем в виде

$$y(x)=\int_0^{\frac{\pi}{6}} G(x,\xi)\left(\xi-\frac{\pi}{6}\right)d\xi,$$

(5.16.4)

где G(x, ξ) определяется формулой (5.16.3). разбивая промежуток интегрирования на два и подставляя в (5.16.4) выражение для функции Грина (5.16.3), получим:

$$y(x)=\frac{1}{3}\int_0^x \cos 3\xi\sin 3x\left(\xi-\frac{\pi}{6}\right)d\xi+\frac{1}{3}\int_x^{\frac{\pi}{6}}\sin 3\xi\cos 3x\left(\xi-\frac{\pi}{6}\right)d\xi=\frac{1}{3}\sin 3x\int_0^x\cos 3\xi\left(\xi-\frac{\pi}{6}\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{3}\cos 3x\int_x^{\frac{\pi}{6}}\sin 3\xi\left(\xi-\frac{\pi}{6}\right)d\xi=\frac{1}{9}\sin 3x\sin 3\xi\left(\xi-\frac{\pi}{6}\right)\Bigg|_0^x+\frac{1}{27}\sin 3x\cos 3\xi\Bigg|_0^x-\frac{1}{9}\cos 3x\cos 3\xi\left(\xi-\frac{\pi}{6}\right)\Bigg|_x^{\frac{\pi}{6}}+$$

$$+\frac{1}{27}\cos 3x\sin 3\xi\Bigg|_x^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{9}\sin 3x\sin 3x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{27}\sin 3x\cos 3x-\frac{1}{27}\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x\cos 3x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+$$

$$+\frac{1}{27}\cos 3x-\frac{1}{27}\cos 3x\sin 3x=\frac{1}{9}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{27}(\cos 3x-\sin 3x)=\frac{6x-\pi-2\cos 3x+2\sin 3x}{54}.$$