Пример решения задачи
Резольвента для интегрального уравнения

ЗАДАНИЕ.

Найти резольвенту для интегрального уравнения Вольтерры со следующим ядром $K(x,t)=x^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}$.

РЕШЕНИЕ.

Из рекуррентных соотношений

$$K_j(x,t)=\int_t^x K(x,s)K_{j-1}(s,t)ds,\ j = 2,\ 3,\ \ldots,$$

получим:

$$K_1(x,t)=x^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}},$$

$$K_2(x,t)=\int_t^x K(x,s)K_1(s,t)ds=\int_t^x x^{\frac{1}{3}}s^{\frac{2}{3}}s^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}ds=\int_t^x x^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}sds=x^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}\int_t^x sds=x^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}\frac{x^2-t^2}{2},$$

$$K_3(x,t)=\int_t^x K(x,s)K_2(s,t)ds=\int_t^x x^{\frac{1}{3}}s^{\frac{2}{3}}s^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}\frac{s^2-t^2}{2}ds=\int_t^x x^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}\frac{s^2-t^2}{2}sds=$$

$$=x^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}\int_t^x\frac{s^2-t^2}{2}sds=\frac{x^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}}{2}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^2.$$

Таким образом,

$$K_j(x,t)=\frac{x^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}}{(j-1)!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^{j-1}.$$

Подставляя это выражение для итерированных ядер в формулу

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}K_j(x,t),$$

найдем резольвенту:

$$R(x,t,\lambda) = x^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \left(\frac{x^2 - t^2}{2} \right)^{j-1} = x^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} e^{\lambda \frac{x^2 - t^2}{2}}.$$