Пример решения задачи
Интегральное уравнение

ЗАДАНИЕ.

Решить интегральное уравнение $y(x)=x+\int\limits_0^x(4\sin(x-t)-x+t)y(t)dt$, *сведя его предварительно к обыкновенному дифференциальному уравнению.*

РЕШЕНИЕ.

Преобразуем данное уравнение:

$$y(x)=x+4\int\limits_0^x\sin(x-t)y(t)dt-\int\limits_0^x(x-t)y(t)dt. \tag{1.16.1}$$

Продифференцируем дважды это интегральное уравнение:

$$y'(x)=1+4\int\limits_0^x\cos(x-t)y(t)dt-\int\limits_0^x y(t)dt; \tag{1.16.2}$$

$$y''(x)=4y(x)-4\int\limits_0^x\sin(x-t)y(t)dt-y(x)=3y(x)-4\int\limits_0^x\sin(x-t)y(t)dt. \tag{1.16.3}$$

Выразим из уравнений (1.16.1) и (1.16.3) интеграл $\int\limits_0^x 4\sin(x-t)y(t)dt$:

$$4\int\limits_0^x\sin(x-t)y(t)dt=y(x)-x+\int\limits_0^x(x-t)y(t)dt,$$

$$4\int\limits_0^x\sin(x-t)y(t)dt=-y''(x)+3y(x).$$

Приравнивая правые части данных уравнений, получим:

$$y(x)-x+\int\limits_0^x(x-t)y(t)dt=-y''(x)+3y(x),$$

$$y^{//}(x) = 2y(x) + x - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$$

Дифференцируем дважды это уравнение:

$$y^{///}(x) = 2y^{/}(x) + 1 - \int_0^x y(t)dt, \qquad (1.16.4)$$

$$y^{////}(x) = 2y^{//}(x) - y(x). \qquad (1.16.5)$$

Таким образом, получили следующее уравнение:

$$y^{////}(x) - 2y^{//}(x) + y(x) = 0. \qquad (1.16.6)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3 + C_4x)e^{x}. \qquad (1.16.7)$$

Начальные условия при x = 0 найдем из (1.16.1), (1.16.2), (1.16.3) и (1.16.4):

$$y(0) = 0,\ y^{/}(0) = 1,\ y^{//}(0) = 0,\ y^{///}(0) = 3. \qquad (1.16.8)$$

Подставив общее решение (1.16.7) в начальные условия (1.16.8), получим:

$C_1 + C_3 = 0;$	$C_1 = 0;$
$-C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1;$	$C_2 = 0{,}5;$
$C_1 - 2C_2 + C_3 + 2C_4 = 0;$	$C_3 = 0;$
$-C_1 + 3C_2 + C_3 + 3C_4 = 3;$	$C_4 = 0{,}5;$

и, следовательно,

$$y(x) = 0{,}5xe^{-x} + 0{,}5xe^{x}$$

или окончательно,

$$y(x) = 0{,}5x(e^{-x} + e^{x})$$