Пример решения задачи
Интегральные уравнения: собственные значения и функции

Задание.

Найти собственные значения и собственные функции уравнения:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (\cos 2\pi x + 2x \sin 2\pi t + t \sin \pi x) y(t) dt.$$

Решение.

Разбивая интеграл на сумму трех интегралов, получим:

$y(x) = C_1 \lambda \cos 2\pi x + 2\lambda C_2 x + \lambda C_3 \sin \pi x$, где

$$C_1 = \int_0^1 y(t) dt\ , C_2 = \int_0^1 \sin 2\pi t\, y(t) dt, \qquad C_3 = \int_0^1 t y(t) dt\,.$$

Подставляя $y(x)$ в выражения для констант, получим

$$C_1 = \int_0^1 (C_1 \lambda \cos 2\pi t + 2\lambda C_2 t + \lambda C_3 \sin \pi t) dt = \lambda C_2 + \frac{2\lambda C_3}{\pi},$$

$$C_2 = \int_0^1 (C_1 \lambda \cos 2\pi t + 2\lambda C_2 t + \lambda C_3 \sin \pi t) \sin 2\pi t\, dt = -\frac{\lambda C_2}{\pi},$$

$$C_3 = \int_0^1 (C_1 \lambda \cos 2\pi t + 2\lambda C_2 t + \lambda C_3 \sin \pi t) t dt = \frac{2}{3} \lambda C_2 + \frac{C_3 \lambda}{\pi}.$$

Из второго уравнения получим либо $C_2 = 0$, либо $\lambda = -\pi$. В первом случае из третьего уравнения получим, что либо $C_3 = 0$ либо $\lambda = \pi$. Если $C_3 = 0$, то $C_1 = 0$, получим тривиальное решение. Если $\lambda = \pi$, то из первого уравнения получим $C_1 = 2C_3$. Взяв $C_3 = \frac{1}{\pi}$, получим, что собственному значению $\lambda = \pi$ соответствует собственная функция $y(x) = 2 \cos 2\pi x + \sin \pi x$.

В случае $\lambda = -\pi$ из третьего уравнения получим $C_3 = -\frac{\pi}{3} C_2$. Подставив в первое уравнение, получим $C_1 = -\frac{\pi}{3} C_2$. Отсюда, взяв $C_2 = \frac{3}{\pi^2}$, получим, что собственному значению $\lambda = -\pi$ соответствует собственная функция $y(x) = \cos 2\pi x - \frac{6x}{\pi} + \sin \pi x$.