Доказательство делимости методом математической индукции

Задание. *Доказать, что при любом натуральном* n *число* a_n *делится на* b.

$$a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n,\ b = 6.$$

Доказательство.

Для решения задания воспользуемся методом математической индукции. Пусть $n = 1$ (наименьшее натуральное число). Тогда

$$a_n = a_1 = 2 + 3 + 7 = 12.$$

Поскольку число 12 делится на 6, то при $n = 1$ исходное утверждение является верным (число a_1 делится на $b = 6$).

Предположим, что для произвольного натурального числа k ($k > 1$) исходное утверждение верно, то есть, число

$$a_k = 2k^3 + 3k^2 + 7k$$

делится на $b = 6$. Покажем, что в этом случае утверждение верно и для числа $k + 1$. Выражение

$$a_{k+1} = 2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 7(k+1).$$

Преобразуем его:

$$a_{k+1} = 2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 7(k+1) =$$

$$= 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 3(k^2 + 2k + 1) + 7(k+1) =$$

$$= 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 + 3k^2 + 6k + 3 + 7k + 7 =$$

$$= (2k^3 + 3k^2 + 7k) + 6k^2 + 6k + 6k + 12 =$$

$$= (2k^3 + 3k^2 + 7k) + 6(k^2 + k + k + 2).$$

Поскольку $a_k = 2k^3 + 3k^2 + 7k$ делится на 6 и выражение $6(k^2 + k + k + 2)$ делится на 6, то выражение $a_{k+1} = 2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 7(k+1)$ также делится на число $b = 6$. Значит, исходное утверждение выполняется для любого натурального числа n. Что и требовалось доказать.