Доказательство неравенства методом математической индукции

Задание. *Докажите методом математической индукции неравенство Бернулли:* $(1+a)^n \geq 1 + a \cdot n$ для всех $n \in N$ и $a > -1$, $a \in R$.

Доказательство:

Докажем справедливость неравенства Бернулли: $(1+a)^n \geq 1 + a \cdot n$ для всех $n \in N$ и $a > -1$, $a \in R$.

При $n = 0$ неравенство Бернулли имеет вид $(1 + a)^0 \geq 1 + a \cdot 0$ – верно, то есть базис индукции выполняется.

Установим справедливость индукционного шага. Предположим, что

$$(1+a)^n \geq 1 + a \cdot n. \qquad (1)$$

Покажем, что

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + a \cdot (n+1). \qquad (2)$$

Умножим обе части неравенства (1) на положительное число $(1+a)$. Тогда $(1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1 + a \cdot n) \cdot (1+a)$, то есть

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + a + a \cdot n + a^2 n. \qquad (3)$$

Поскольку $a^2 \geq 0$, имеем

$$1 + a + a \cdot n + a^2 n \geq 1 + a + a \cdot n = 1 + a(n + 1). \qquad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) получаем неравенство (2). На основании принципа математической индукции заключаем, что $(1+a)^n \geq 1 + a \cdot n$ для всех $n \in N$.