Пример решения задачи. Исчисление предикатов

Задача. *Для формулы* $\forall x \forall y \exists z \exists t \ \ (P(x,t) \& \neg P(y,z))$ *построить сколемовскую формулу. Для любой системы* $\{(M,P), \text{ где } M=\{0{,}1\}\}$, *найти подходящее обогащение.*

Решение.

Заданная формула представлена в виде предваренной нормальной формулы. Для построения сколемовской нормальной формы, необходимо выполнить следующие действия:

- последовательно слева направо вычеркнуть каждый квантор существования, заменяя все вхождения переменной, связанной этим квантором, константой, если в кванторной приставке перед вычеркиваемым квантором существования нет кванторов общности, либо функциональным символом, местность которого равна числу кванторов общности, предшествующих вычеркиваемому квантору существования. Аргументами функционального символа являются переменные, которые связаны предшествующими кванторами общности.

В заданной формуле имеем две переменные z и t, связанные квантором существования. Оба квантора существования стоят после двух кванторов общности, поэтому заменяем эти кванторы существования функциональными символами, местность которых равна числу 2, а аргументами являются переменные x и y.

Таким образом, сколемовская нормальная форма имеет вид:

$$\forall x \forall y (P\big(x, \varphi_2(x,y)\big) \& \neg P\big(y, \varphi_1(x,y)\big).$$

Полученная формула выполнима в модели:

$\mathcal{M}1 = (\{0{,}1\}; \sim;\ \varphi_1(x,y);\ \varphi_2(x,y))$, если $\varphi_1(x,y) = \neg y$, $\varphi_2(x,y) = x$.

Очевидно, $P(x,x)=1$ для $\forall x \in \{0,1\}$ и $\neg P(y,\neg y)=1$ для $\forall y \in \{0,1\}$. Тогда конъюнкция этих двух выражений также является истинной для $\forall x \forall y \in \{0,1\}$.