

Исчисление предикатов. Пример решения задачи

Задача. Составить предваренную нормальную форму:

$$\neg \exists x (\forall y P(x, y) \supset \exists y P(y, x)) \vee \forall y ((\neg Q(x, y) \supset Q(y, x)) \& \forall z \neg P(z))$$

Решение.

Применяем алгоритм приведения к ПНФ, используя законы логики предикатов:

$$P(x, y) \equiv P(y, x)$$

Переименовываем переменную:

$$\exists y P(y, x) \equiv \exists y_2 P(y_2, x)$$

Преобразуем:

$$\neg \exists x (\forall y_1 P(x, y_1) \supset \exists y_2 P(y_2, x)) \vee \forall y_1 ((\neg Q(x, y_1) \supset Q(y_1, x)) \& \forall z \neg P(z))$$

Далее преобразуем импликацию: $P \supset Q \equiv \neg P \vee Q$

Преобразуем:

$$\neg \exists x (\neg \forall y_1 P(x, y_1) \vee \exists y_2 P(y_2, x)) \vee \forall y_1 ((\neg \neg Q(x, y_1) \vee Q(y_1, x)) \& \forall z \neg P(z))$$

убираем двойное отрицание

$$\neg \exists x (\neg \forall y_1 P(x, y_1) \vee \exists y_2 P(y_2, x)) \vee \forall y_1 ((Q(x, y_1) \vee Q(y_1, x)) \& \forall z \neg P(z))$$

$$Q(x, y_1) \equiv Q(y_1, x)$$

$$\neg \exists x (\neg \forall y_1 P(x, y_1) \vee \exists y_2 P(y_2, x)) \vee \forall y_1 (Q(x, y_1) \& \forall z \neg P(z))$$

Продвигаем отрицания вглубь

$$\neg \exists x (\neg \forall y_1 P(x, y_1) \vee \exists y_2 P(y_2, x)) \vee \forall y_1 (Q(x, y_1) \& \forall z \neg P(z)) \equiv$$

$$\equiv \exists x (\neg \forall y_1 \neg P(x, y_1) \vee \exists y_2 \neg P(y_2, x)) \vee \forall y_1 (Q(x, y_1) \& \forall z \neg P(z)) \equiv$$

$$\equiv \exists x (\forall y_1 \neg \neg P(x, y_1) \vee \exists y_2 \neg P(y_2, x)) \vee \forall y_1 (Q(x, y_1) \& \forall z \neg P(z)) \equiv$$

$$\equiv \exists x (\forall y_1 P(x, y_1) \vee \exists y_2 \neg P(y_2, x)) \vee \forall y_1 (Q(x, y_1) \& \forall z \neg P(z))$$

Выносим кванторы.

$$\exists x (\forall y_1 P(x, y_1) \vee \exists y_2 \neg P(y_2, x)) \vee \forall y_1 (Q(x, y_1) \& \forall z \neg P(z)) \equiv$$

$$\equiv \exists x \forall y_1 \exists y_2 (P(x, y_1) \vee \neg P(y_2, x)) \vee \forall y_1 \forall z (Q(x, y_1) \& \neg P(z)) \equiv$$

$$\equiv \exists x \forall y_1 \exists y_2 \forall z (P(x, y_1) \vee \neg P(y_2, x) \vee Q(x, y_1) \& \neg P(z))$$