Решение задачи о классах булевых функций

Задание.

Проверить леммы о нелинейной, немонотонной и несамодвойственной функциях для функции $f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\to\overline{(x_3+x_1)}$.

Решение.

По условию, функция

$$f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\to\overline{(x_3+x_1)}.$$

Используя основные булевы тождества, преобразуем функцию:

$$f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\to\overline{(x_3+x_1)}=\overline{(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)}\vee\overline{(x_3+x_1)}=\bar{\bar{x}}_1\wedge\bar{\bar{x}}_2\vee\overline{(x_3+x_1)}=$$

$$=\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2\vee(x_3x_1\vee\bar{x}_3\bar{x}_1)=x_1x_2\vee x_3x_1\vee\bar{x}_3\bar{x}_1.$$

Булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$ называется самодвойственной, если для любого набора $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in E_2^n$ выполняется равенство

$$f(\bar{\alpha}_1,\dots,\bar{\alpha}_n)=\overline{f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}.$$

Функция $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2\vee x_3x_1\vee\bar{x}_3\bar{x}_1$ - несамодвойственная функция, поскольку $f(1{,}0{,}0)=f(0{,}1{,}1)$, а значит $f(1{,}0{,}0)\neq\overline{f(0{,}1{,}1)}$.

Проверим, выполняется ли лемма о несамодвойственной функции, то есть выясним, можно ли, подставив в функцию $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2\vee x_3x_1\vee\bar{x}_3\bar{x}_1$ вместо всех переменных функции x и $\bar{x}$, получить функцию φ(x) ≡ const. Подставим вместо аргументов функции *f* функцию *x*, имеем:

$$f(x,x,x)=g(x)=xx\vee xx\vee\bar{x}\bar{x}=xx\vee\bar{x}\bar{x}\equiv1.$$

Также можно получить 0, подставив x вместо первого аргумента, а $\bar{x}$ - вместо второго и третьего аргументов. Тогда

$$f(x,\bar{x},\bar{x})=x\bar{x}\vee\bar{x}x\vee x\bar{x}\equiv0.$$

Таким образом, для функции $f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\to\overline{(x_3+x_1)}=x_1x_2\vee x_3x_1\vee\bar{x}_3\bar{x}$ лемма о несамодвойственной функции выполняется.

Булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется линейной функцией, если она представима линейным полиномом Жегалкина.

Функция $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_3x_1 \vee \bar{x}_3\bar{x}_1$ - нелинейная функция, поскольку дизъюнкция не является линейной операцией. Действительно, если $x_1 = 1$, то

$$f(1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_3 = \overline{\overline{x_2 \vee x_3}} = \overline{\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3} = (x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1 =$$

$$= x_2x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1 \oplus 1 = x_2x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 .$$

Мы видим, что полином Жегалкина нелинеен.

Проверим, выполняется ли лемма о нелинейной функции, то есть выясним, можно ли, подставив в функцию $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_3x_1 \vee \bar{x}_3\bar{x}_1$ вместо всех переменных функции x, $\bar{x}$, y, $\bar{y}$, 0, 1 получить функцию $\varphi(x, y) = x \cdot y$ или $\varphi(x, y) = \overline{x \cdot y}$. Подставляя вместо аргумента x_1 единицу, а вместо аргументов x_2, x_3 - $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ соответственно, получим функцию двух аргументов

$$g(x_2, x_3) = f(1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 = \overline{x_2x_3} .$$

Таким образом, для функции $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \to \overline{(x_3 + x_1)} = x_1x_2 \vee x_3x_1 \vee \bar{x}_3\bar{x}_1$ лемма о нелинейной функции выполняется.

Булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется монотонной , если для любой пары наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, из которых набор $\tilde{\alpha}$ предшествует набору $\tilde{\beta}$, выполняется неравенство

$$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \le f(\beta_1,\ldots,\beta_n) .$$

Функция $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_3x_1 \vee \bar{x}_3\bar{x}_1$ - немонотонная функция, поскольку

$$f(0,0,0) = 1 > f(0,0,1) = 0 ,$$

а набор (0,0,0) предшествует набору (0,0,1).

Проверим, выполняется ли лемма о немонотонной функции, то есть выясним, можно ли, подставив в функцию $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_3x_1 \vee \bar{x}_3\bar{x}_1$ вместо переменных 0, 1, x получить функцию $\varphi(x)=\bar{x}$. Рассмотрим функцию $g(x)=f(0,1,x)$. Проверим, что $g(x)=\bar{x}$. Действительно,

$$g(x)=f(0,1,x)=0\cdot 1\vee x\cdot 0\vee \bar{x}\cdot 1=\bar{x}.$$

Таким образом, для функции $f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\to\overline{(x_3+x_1)}=x_1x_2\vee x_3x_1\vee\bar{x}_3\bar{x}_1$ лемма о немонотонной функции выполняется.

Ответ: для функции $f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\to\overline{(x_3+x_1)}$ леммы о немонотонной, нелинейной, несамодвойственной функции выполняются.