Решение задачи о тупиковой ДНФ и базисе системы булевых функций

Задача.

а) Используя эквивалентные преобразования получить тупиковую ДНФ;

б)Построить функционально полную систему функций так, чтобы эта система была базисом и содержала f (x, y, z, p)

$$f(x,y,z,p)=\overline{p}\downarrow y\to z\vee p\Leftrightarrow y\oplus z/x\Leftarrow p$$

Решение.

а) Найдем тупиковую ДНФ.

1) Найдем сокращенную ДНФ булевой функции $f(x,y,z,p)=\overline{p}\downarrow y\to z\vee p\Leftrightarrow y\oplus z/x\Leftarrow p$. Для этого воспользуемся эквивалентными преобразованиями [3, с.11], учитывая приоритет выполнения логических операций [7].

Преобразуем формулу $\overline{p}\downarrow y\to z\vee p$:

$$\overline{p}\downarrow y\to z\vee p\sim(\overline{p}\downarrow y)\to(z\vee p)\sim(\overline{\overline{p}\vee y})\to(z\vee p)\sim(\overline{\overline{p}\vee y})\to(z\vee p)$$

$$\sim(\overline{\overline{\overline{p}\vee y}})\vee(z\vee p)\sim(\overline{p}\vee y)\vee(z\vee p)\sim\overline{p}\vee y\vee z\vee p\sim(\overline{p}\vee p)\vee y\vee z.$$

Преобразуем формулу $y\oplus z/x\Leftarrow p$:

$$y\oplus z/x\Leftarrow p\sim y\oplus(z/x)\Leftarrow p\sim y\oplus(\overline{zx})\Leftarrow p\sim y\oplus((\overline{zx})\Leftarrow p)\sim$$

$$\sim y\oplus(\overline{p}\vee(\overline{zx}))\sim\overline{y\leftrightarrow(\overline{p}\vee(\overline{zx}))}\sim(\overline{y}\vee(\overline{p}\vee(\overline{zx}))\wedge(\overline{\overline{p}\vee\overline{\overline{zx}}}\vee y)\sim$$

$$\sim\overline{ypzx}\wedge(\overline{\overline{pzx}}\vee y)\sim\overline{ypzx}\wedge(pzx\vee y)\sim(\overline{ypzx}\wedge pzx)\vee(\overline{ypzx}\wedge y)\sim$$

$$\sim((\overline{y}\vee\overline{pzx})\wedge pzx)\vee((\overline{y}\vee\overline{pzx})\wedge y)\sim((\overline{y}\wedge pzx)\vee(\overline{pzx}\wedge pzx))\vee((\overline{y}\wedge y)\vee(\overline{pzx}\wedge y))\sim$$

$$\sim((\overline{y}\wedge pzx)\vee 0)\vee(0\vee(\overline{pzx}\wedge y))\sim\overline{y}pzx\vee y\overline{pzx}.$$

Преобразуем формулу $\overline{p}\downarrow y\to z\vee p\Leftrightarrow y\oplus z/x\Leftarrow p$:

$$\overline{p}\downarrow y\to z\vee p\Leftrightarrow y\oplus z/x\Leftarrow p\sim(\overline{p}\vee p\vee y\vee z)\Leftrightarrow\overline{y}pzx\vee y\overline{pzx}\sim$$

$$\sim(\overline{\overline{p}\vee p\vee y\vee z})\wedge(\overline{\overline{y}pzx\vee y\overline{pzx}})\vee(\overline{p}\vee p\vee y\vee z)\wedge(\overline{y}pzx\vee y\overline{pzx})\sim$$

$$\sim(p\wedge\overline{p}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\wedge(\overline{\overline{y}pzx\vee y\overline{pzx}})\vee(\overline{p}\vee p\vee y\vee z)\wedge(\overline{y}pzx\vee y\overline{pzx})\sim$$

$$\sim (0 \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \wedge (\overline{\bar{y}pzx \vee y\overline{pzx}}) \vee (\bar{p} \vee p \vee y \vee z) \wedge (\bar{y}pzx \vee y\overline{pzx}) \sim$$

$$\sim 0 \wedge (\overline{\bar{y}pzx \vee y\overline{pzx}}) \vee (\bar{p} \vee p \vee y \vee z) \wedge (\bar{y}pzx \vee y\overline{pzx}) \sim$$

$$\sim 0 \vee (\bar{p} \vee p \vee y \vee z) \wedge (\bar{y}pzx \vee y\overline{pzx}) \sim ((\bar{p} \vee p) \vee y \vee z) \wedge (\bar{y}pzx \vee y\overline{pzx}) \sim$$

$$\sim (1 \vee y \vee z) \wedge (\bar{y}pzx \vee y\overline{pzx}) \sim 1 \wedge (\bar{y}pzx \vee y\overline{pzx}) \sim \bar{y}pzx \vee y\overline{pzx} \sim$$

$$\sim \bar{y} \leftrightarrow pzx \sim (y \vee pzx) \wedge (\bar{y} \vee \overline{pzx}) \sim (y \vee pzx) \wedge (\bar{y} \vee \bar{p} \vee \bar{z} \vee \bar{x}) \sim$$

$$\sim (y\bar{y} \vee pzx\bar{y} \vee \bar{p}y \vee p\bar{p}zx \vee \bar{z}y \vee pz\bar{z}x \vee \bar{x}y \vee pzx\bar{x}) \sim$$

$$\sim (0 \vee pzx\bar{y} \vee \bar{p}y \vee 0 \vee \bar{z}y \vee 0 \vee \bar{x}y \vee 0) \sim pzx\bar{y} \vee \bar{p}y \vee \bar{z}y \vee \bar{x}y .$$

2) Для каждого набора a_j из N_f, $j = 1,2,\ldots,K$ выделяем в сокращенной ДНФ функции f все такие элементарные конъюнкции $K_{ij},\ldots,K_{tj}$, что $K_{ij}(a_j) = 1$, $i = 1,2,\ldots,t$ [5, с.18].

Обозначим $K_1 = pzx\bar{y}$, $K_2 = \bar{p}y$, $K_3 = \bar{z}y$, $K_4 = \bar{x}y$.

$$N_f = \{(1,0,1,1);(0,1,0,0);(0,1,0,1);(0,1,1,0);(0,1,1,1);(1,1,0,0);(1,1,0,1);(1,1,1,0)\}.$$

3) Составляем выражение вида

$$(K_{11} \vee K_{12} \vee \ldots \vee K_{1t})(K_{21} \vee K_{22} \vee \ldots \vee K_{2t})\ldots(K_{K1} \vee K_{K2} \vee \ldots \vee K_{Kt}).$$

Имеем:

$$K_1 \wedge (K_2 \vee K_3 \vee K_4) \wedge (K_3 \vee K_4) \wedge (K_2 \vee K_4) \wedge K_4 \wedge (K_2 \vee K_3) \wedge K_3 \wedge K_2 .$$

4) Применим к составленному выражению законы дистрибутивности и поглощения [3, с.11]:

$$K_1 \wedge (K_2 \vee K_3 \vee K_4) \wedge (K_3 \vee K_4) \wedge (K_2 \vee K_4) \wedge K_4 \wedge (K_2 \vee K_3) \wedge K_3 \wedge K_2 =$$

$$= K_1K_2K_3K_4 \wedge ((K_3 \vee K_4) \vee (K_2 \wedge 0)) \wedge (K_2 \vee K_3K_4) =$$

$$= K_1K_2K_3K_4 \wedge (K_3 \vee K_4) \wedge (K_2 \vee K_3K_4) =$$

$$= K_1K_2K_3K_4 \wedge (K_3K_2 \vee K_4K_2 \vee K_3K_4K_3 \vee K_3K_4K_4) =$$

$$= K_1K_2K_3K_4 \wedge (K_3K_2 \vee K_4K_2 \vee K_3K_4) =$$

$$= K_1K_2K_3K_4K_3K_2 \vee K_1K_2K_3K_4K_4K_2 \vee K_1K_2K_3K_4K_3K_4 = K_1K_2K_3K_4 .$$

Таким образом, функция $f(x,y,z,p) = \bar{p} \downarrow y \to z \vee p \Leftrightarrow y \oplus z / x \Leftarrow p$ имеет только одну тупиковую ДНФ:

$$D = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 = pzx\bar{y} \vee \bar{p}y \vee \bar{z}y \vee \bar{x}y .$$

б) Построить функционально полную систему функций так, чтобы эта система была базисом и содержала функцию $f(x, y, z, p) \sim pzx\bar{y} \vee \bar{p}y \vee \bar{z}y \vee \bar{x}y$.

По теореме [8], для того чтобы система функций S была функционально полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала: 1) нелинейную функцию; 2) немонотонную функцию; 3) несамодвойственную функцию; 4) функцию, не сохраняющую 0; 5) функцию, не сохраняющую 1.

Данная функция $f(x,y,z,p) = pzx\bar{y} \vee \bar{p}y \vee \bar{z}y \vee \bar{x}y$ представима в виде полинома Жегалкина: $f(x,y,z,p) = pzx\bar{y} \oplus \bar{p}y \oplus \bar{z}y \oplus \bar{x}y$, так как $pzx\bar{y} \vee \bar{p}y \vee \bar{z}y \vee \bar{x}y$ - СДНФ. Это представление единственно [8]. Из этого представления следует, что функция нелинейная. Элементарные конъюнкции СДНФ содержат отрицание, значит, функция $f(x,y,z,p)$ немонотонная.

Проверим, является ли функция $f(x,y,z,p)$ самодвойственной, то есть, выполняется ли равенство $f(x,y,z,p) = \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{p})$ [8].

$$\bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{p}) \sim \overline{\bar{p}\bar{z}\bar{x}y \vee p\bar{y} \vee z\bar{y} \vee x\bar{y}} \sim \overline{\bar{p}\bar{z}\bar{x}y} \wedge \overline{p\bar{y}} \wedge \overline{z\bar{y}} \wedge \overline{x\bar{y}} \sim$$

$$\sim (p \vee x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{p} \vee y) \wedge (\bar{z} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) \sim (p \vee x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\overline{pzx} \vee y) \sim$$

$$\sim p\overline{pzx} \vee x\overline{pzx} \vee \bar{y}\overline{pzx} \vee z\overline{pzx} \vee py \vee xy \vee y\bar{y} \vee zy \sim \overline{ypzx} \vee py \vee xy \vee zy.$$

Последняя функция не эквивалентна исходной. Например, при $x = y = z = p = 0$ $f(x,y,z,p) = 0$, а $\bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{p}) = 1$. То есть, функция $f(x,y,z,p)$ несамодвойственная.

Поскольку $f(0,0,0,0) = 0$, то функция сохраняет 0. поэтому в систему нужно добавить функцию, не сохраняющую 0, например, $\overline{ypzx}$.

Поскольку $f(1,1,1,1) = 0$, то функция $f(x,y,z,p)$ является функцией, не сохраняющей единицу.

Таким образом, функционально полная систему функций $\{\bar{p} \downarrow y \to z \vee p \Leftrightarrow y \oplus z / x \Leftarrow p;\ \overline{ypzx}\}$, является базисом и содержит функцию $f(x, y, z, p)$.

<u>Ответ</u>: а) $pzx\bar{y} \vee \bar{p}y \vee \bar{z}y \vee \bar{x}y$; б) $\{\bar{p} \downarrow y \to z \vee p \Leftrightarrow y \oplus z / x \Leftarrow p;\ \overline{ypzx}\}$.