Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
©МатБюро - Решение задач по высшей математике

Тема: Линейные пространства

ЗАДАНИЕ. Доказать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} 2a & a+3b-2c \\ b & 5c \end{pmatrix}$ образуют линейное подпространство в пространстве матриц M_{22}. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

РЕШЕНИЕ. По определению подмножество M элементов линейного пространства L называется подпространством пространства L, если выполнены два условия:
1) $\forall x,\ y \in M\ (x+y)\ \in\ M$
2) $\forall x \in M, \forall \alpha \in R\ \alpha x \in M$.
Проверим выполнение этих условий.

Пусть $x = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+3b_1-2c_1 \\ b_1 & 5c_1 \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} 2a_2 & a_2+3b_2-2c_2 \\ b_2 & 5c_2 \end{pmatrix}$ – два произвольных элемента из искомого множества матриц вида $\begin{pmatrix} 2a & a+3b-2c \\ b & 5c \end{pmatrix}$ (назовем его L). Тогда их сумма

$$x+y = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+3b_1-2c_1 \\ b_1 & 5c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 & a_2+3b_2-2c_2 \\ b_2 & 5c_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2(a_1+a_2) & (a_1+a_2)+3(b_1+b_2)-2(c_1+c_2) \\ (b_1+b_2) & 5(c_1+c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_3 & a_3+3b_3-2c_3 \\ b_3 & 5c_3 \end{pmatrix}$$

тоже принадлежит множеству L.

Пусть $x = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+3b_1-2c_1 \\ b_1 & 5c_1 \end{pmatrix}$ - произвольный элемент множества L, α - произвольное число. Тогда их произведение

$$\alpha x = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+3b_1-2c_1 \\ b_1 & 5c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha a_1 & \alpha a_1+3\alpha b_1-2\alpha c_1 \\ \alpha b_1 & 5\alpha c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_4 & a_4+3b_4-2c_4 \\ b_4 & 5c_4 \end{pmatrix}$$

тоже принадлежит множеству L.
Следовательно, L - линейное подпространство пространства M_{22}.

Найдем его базис и размерность. Любой элемент из L может быть представлен в виде:

$$x = \begin{pmatrix} 2a & a+3b-2c \\ b & 5c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

то есть в виде линейной комбинации трех матриц. Очевидно, что эти три матрицы линейно независимы, так как такая линейная комбинация равна нулевой матрице тогда и только тогда, когда $a=b=c=0$. Таким образом, матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве L, размерность пространства равна 3.

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
©МатБюро - Решение задач по высшей математике

Так как размерность пространства M_{22} равна 4, чтобы дополнить этот базис до базиса всего пространства нужно добавить еще один базисный элемент, чтобы все четыре были линейно независимы. В качестве такого элемента можно выбрать, например, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.