Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_ag.php?p1=aglin
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Матрица перехода линейного оператора

Пример решения задачи по алгебре

Задача. *Линейный оператор* $A: R^3 \to R^3$ *в базисе* e_1, e_2, e_3 *представлен данной матрицей. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе* f_1, f_2, f_3.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + 3e_3, \\ f_2 = 4e_1 + e_2 - e_3, \\ f_3 = 2e_1 - 3e_2. \end{cases}$$

Решение

При переходе от «старого» базиса e_1, e_2, e_3 к «новому» базису f_1, f_2, f_3 изменяются координаты векторов пространства и, следовательно, изменяется матрица линейного оператора. При этом, матрица A оператора в «старом» базисе и матрица A' того же оператора в «новом» базисе связаны соотношением $A' = F^{-1} \cdot A \cdot F$, где F - матрица перехода от «старого» базиса к «новому», то есть квадратная матрица, столбцы которой состоят из координат новых базисных векторов в «старом» базисе.

Составим матрицу перехода $F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и вычислим $A' = F^{-1} \cdot A \cdot F$.

Для этого найдем матрицу F^{-1}: $F^{-1} = \dfrac{1}{\det F} \begin{vmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix}$,

$$\det F = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -43,$$

$$F_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad F_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad F_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14,$$

$$F_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9, \quad F_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad F_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$F_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad F_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13, \quad F_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$F^{-1} = -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -14 \\ -9 & -6 & 1 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

и вычислим $A' = F^{-1} \cdot A \cdot F$:

$$A' = F^{-1}AF = -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -14 \\ -9 & -6 & 1 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_ag.php?p1=aglin
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

$$= -\frac{1}{43}\begin{pmatrix} 18 & -37 & -3 \\ 11 & -25 & 34 \\ 12 & 47 & -45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{43}\begin{pmatrix} 46 & 38 & 147 \\ 138 & -15 & 97 \\ -170 & 140 & -117 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{46}{43} & -\frac{38}{43} & -\frac{147}{43} \\ -\frac{138}{43} & \frac{15}{43} & -\frac{97}{43} \\ \frac{170}{43} & -\frac{140}{43} & \frac{117}{43} \end{pmatrix}.$$

Ответ. Матрица перехода $A' = \begin{pmatrix} -\frac{46}{43} & -\frac{38}{43} & -\frac{147}{43} \\ -\frac{138}{43} & \frac{15}{43} & -\frac{97}{43} \\ \frac{170}{43} & -\frac{140}{43} & \frac{117}{43} \end{pmatrix}$