Тема: Линейные пространства

Задание. Пусть L – множество многочленов степени не выше 2, удовлетворяющих условию $p(1)+p'(1)+p''(1)=0$. Доказать, что L – линейное подпространство в пространстве P_2. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

Решение. Любой многочлен из пространства P_2 имеет вид $p(x)=ax^2+bx+c$. Его производные $p'(x)=2ax+b, p''(x)=2a$. Тогда условие принадлежности пространству L имеет вид:
$p(1)+p'(1)+p''(1)=a+b+c+2a+b+2a=5a+2b+c=0$, откуда $c=-2b-5a$, то есть общий вид многочленов из пространства L : $p(x)=ax^2+bx-2b-5a$.

Покажем, что L – линейное подпространство P_2. По определению подмножество M элементов линейного пространства L называется подпространством пространства L, если выполнены два условия:
1) $\forall x,\ y\in M\ (x+y)\ \in\ M$
2) $\forall x\in M, \forall \alpha\in R\ \alpha x\in M$.

Проверим выполнение этих условий.
Пусть $p_1(x)=a_1x^2+b_1x-2b_1-5a_1$ и $p_2(x)=a_2x^2+b_2x-2b_2-5a_2$ – два произвольных элемента из L. Тогда их сумма
$p_1(x)+p_2(x)=a_1x^2+b_1x-2b_1-5a_1+a_2x^2+b_2x-2b_2-5a_2=$
$=(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x-2(b_1+b_2)-5(a_1+a_2)=a_3x^2+b_3x-2b_3-5a_3$
тоже принадлежит множеству L
Аналогично для второго свойства, пусть α - произвольное число, $p_1(x)=a_1x^2+b_1x-2b_1-5a_1$ – произвольный элемент из L. Тогда их произведение
$\alpha p_1(x)=\alpha(a_1x^2+b_1x-2b_1-5a_1)=\alpha a_1x^2+\alpha b_1x-2\alpha b_1-5\alpha a_1=$
$=a_4x^2+b_4x-2b_4-5a_4$
тоже принадлежит множеству L

Найдем базис и размерность пространства L. Рассмотрим произвольный элемент из этого пространства
$p(x)=ax^2+bx-2b-5a=a(x^2-5)+b(x-2)$, то есть он может быть представлен как линейная комбинация двух многочленов $p_1(x)=x^2-5, p_2(x)=x-2$. Покажем, что эти многочлены линейно независимы. Составим векторы их координат в стандартном базисе пространства P_2 $\{1,x,x^2\}$. Получим вектора (-5,0,1) и (-2,1, 0). Эти вектора линейно независимы, так как их координаты не пропорциональны. Таким образом, многочлены $p_1(x)=x^2-5, p_2(x)=x-2$ образуют базис пространства L, его размерность равна 2.

Дополним базис подпространства L до базиса всего пространства. Выберем, например, в качестве третьего базисного элемента $p_3(x)=1$. Аналогичным образом проверяется, что полученные многочлены будут линейно независимы, то есть образуют базис в пространстве P_2.